Laboratorio di Informatica T (Ch9)

Funzione `fprintf`

Funzione `fprintf`

La funzione `fprintf` stampa con formattazione controllata:

L'interfaccia della funzione è:

```
function fprintf(FORMAT, E1, E2, ...)
```

- `FORMAT` è una stringa da stampare
- `E1`, `E2` sono espressioni (e.g. nomi di variabile)
- `FORMAT` può contenere dei "segnaposto", con il carattere `%`
  - E.g. `%f` è un segnaposto per un valore reale
  - E.g. `%d` è un segnaposto per un valore intero
- Il primo segnaposto è sostituito con il valore di `E1`
- Il secondo segnaposto è sostituito con il valore di `E2`, etc.

Funzione `fprintf`

Vediamo un esempio:

```
A = 10.5;
B = 2;
fprintf('A = %f, B = %f, A*B = %f\n', A, B, A*B)
```

Stampa: `A = 10.500000, B = 2.000000, A*B = 21.000000`

- "`\n`" è un carattere speciale e serve ad andare a capo

I segnaposto cono configurabili

Ci interessa un caso solo: "`%.Nf`" stampa un reale con `N` valori decimali

- E.g. `%.3f` stampa con 3 cifre decimali
- E.g. `%.1f` stampa con 1 cifra decimale

Ciclo `while`

Ciclo `while`

Il ciclo `for` non è sempre adeguato ad implementare iterazioni:

- E.g. quando non è desiderabile limitare il numero di iterazioni a priori

Per questi casi, Matlab fornisce il ciclo `while`

La sintassi è:

```
while <espressione> % vera o falsa
  <corpo>
end
```

- Il corpo viene ripetuto…
- …Fintanto che `<espressione>` denota `true` (o $\neq 0$)

Funzione Zeta di Riemann

Consideriamo la funzione Zeta di Riemann ed il nostro vecchio codice:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

```
z = 0;                                % val. della somma
old_z = -Inf;                         % vecchio z
for n = 1:10000                         % 1e5 = iterazioni massime
  z = z + 1 ./ n.^s;
  if abs(z - old_z) < 1e-6            % 1e-6 è la tolleranza
    break                             % Interrompe il ciclo
  end
  old_z = z;                          % rimpiazzo il vecchio z
end
```

- Cosa succede se 10000 iterazioni non bastano a convergere?

Funzione Zeta di Riemann

Consideriamo la funzione Zeta di Riemann ed il nostro vecchio codice:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

```
z = 0;                               % val. della somma
n = 1;
old_z = -Inf;                        % vecchio z
while abs(z - old_z) > 1e-6 % 1e-6 è la tolleranza
  old_z = z;                         % memorizzo il vecchio z
  z = z + 1 ./ n.^s;
  n = n + 1;                         % incremento n
end
```

- Fintanto che $|z - old_z| > 1e - 6$, il ciclo prosegue

Funzione Zeta di Riemann

Consideriamo la funzione Zeta di Riemann ed il nostro vecchio codice:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

```
z = 0;                            % val. della somma
n = 1;
old_z = -Inf;                     % vecchio z
while abs(z - old_z) > 1e-6 % 1e-6 è la tolleranza
  old_z = z;                      % memorizzo il vecchio z
  z = z + 1 ./ n.^s;
  n = n + 1;                      % incremento n
end
```

- Dobbiamo però gestire l'indice `n` esplicitamente

Cicli Infiniti

Il ciclo `while` non fornisce garanzie di terminazione

Per esempio:

```
n = 1;
s = 0;
while n < 10
  s = s + n;
end
```

- Questo ciclo non termina
- Perché **`n`** non viene incrementato!

Se vi capita, niente panico: basta premere **[CTRL+C]**

- Capita più spesso di quanto ci si possa aspettare :-)

Equilibrio di Sistemi Tempo-Discreti

Equilibrio di Sistemi Tempo-Discreti

Consideriamo un sistema dinamico tempo-discreto

In generale è definito da una equazione del tipo:

$$x^{(t+1)} = f(x^{(t)})$$

Per questo tipo di sistemi, abbiamo imparato a:

- Osservare l'andamento dello stato del tempo
- Identificare il tipo di comportamento (convergente, periodico...)
- Per i sistemi convergenti, individuare uno stato di equilibrio...
- ...Simulando sufficientemente a lungo e misurando lo stato finale

Gli stati di equilibrio, però, si possono determinare a priori!

Determinazione degli Stati di Equilibrio

Uno stato è di equilibrio se viene "trasformato in se stesso"

Formalmente, uno stato di equilibrio x deve soddisfare:

$$x = f(x)$$

- Manca l'indice di tempo, perché lo stato a sx e dx è lo stesso

Se risolviamo l'equazione, determiniamo gli stati di equilibrio

- In generale x è un vettore, quindi $x = f(x)$ è un sistema di equazioni
- Se $f(x)$ è lineare, possiamo usare la forma matriciale:

$$Ax = b$$

E possiamo risolverlo con i metodi visti in analisi numerica

Un Esempio: Pagerank

Per l'algoritmo pagerank, visto la scorsa lezione

L'equazione fondamentale è data da:

$$x^{(t+1)} = p \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{vettore}} + (1-p)Px^{(t)}$$

Uguagliando $x^{(t+1)}$ e $x^{(t)}$ otteniamo:

$$Ix = p\frac{1}{n} - (1-p)Px$$

$$\underbrace{(I - (1-p)P)}_{A}x = \underbrace{p\frac{1}{n}}_{b}$$

- A è quadrata per costruzione (deriva da una transizione di stato)
- Quindi, in casi normali, la soluzione è data da $x = A^{-1}b$

Un Esempio: Pagerank

Supponendo di disporre delle variabili:

- `p`, per la probabilità di stancarsi
- `P`, per la matrice delle probabilità di click
- `n`, per il numero delle pagine

Possiamo prima costruire la matrice $\boldsymbol{A}$ e la colonna $\boldsymbol{b}$:

```
A = (eye(n) - (1-p)*P) % eye e' la matrice identita'
b = (ones(n,1) * p/n) % ones(n,1) per avere una colonna
```

E quindi possiamo calcolare la soluzione con una divisione sinistra:

```
xeq = A \ b
```

Equilibrio di Sistemi Tempo-Discreti Non Lineari

L'approccio è valido anche per sistemi dinamici non lineari

Uno stato, per essere di equilibrio, deve soddisfare:

$$x = f(x)$$

- I.e. la relazione che abbiamo già visto!
- …Che corrisponderà però $\boldsymbol{x}$ ad un sistema di equazioni non lineari

Ce ne occuperemo più avanti nel corso

Simulare o Non Simulare?

Quando risolvere un sistema di equazioni e quando simulare?

Simuliamo se:

- Ci interessa il comportamento nel tempo
- Il sistema non ha uno stato di equilibrio (e.g. periodico, caotico)
- Vogliamo determinare (empiricamente) la stabilità dell'equilibrio
- ...

Risolviamo le equazioni se:

- Non ci interessa il comportamento nel tempo
- Non ci interessa la stabilità (basta uno stato di equilibrio)
- Se dobbiamo calcolare lo stato di equilibrio con alta precisione
- ...

Stati di Equilibrio Multipli

Stati di Equilibrio Multipli

Un sistema dinamico tempo discreto lineare:

- Ha sempre un solo stato di equilibrio…
- …A meno che la matrice dei coefficienti non sia singolare

Per esempio, per le previsioni del tempo (scorsa lezione) avevamo:

$$x^{(t+1)} = Px^{(t)} \quad \text{con} \quad P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Da cui si ottiene il sistema:

$$(I - P)x = 0 \quad \text{con} \quad (I - P) = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.5 \\ -0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

- Possiamo usare la funzione **`det`** per calcolare il determinante:

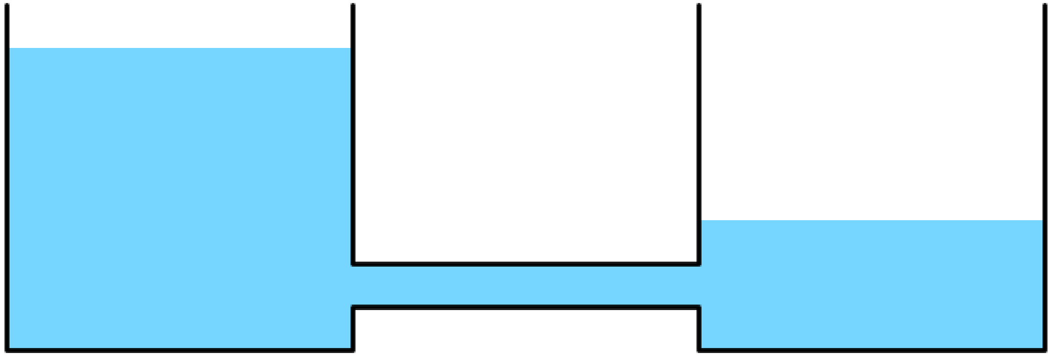
```
det(eye(2) - A) % -1.1102e-17 (sarebbe 0)
```

Stati di Equilibrio Multipli

Cosa vuol dire in pratica?

- Un sistema sotto-determinato ha infinite soluzioni…
- …Quindi ci sono infiniti stati di equilibrio

Per esempio, supponiamo di avere due vasi comunicanti



- Il livello finale dipende da quanta acqua c'è nel sistema!
- In questo specifico caso, lo stato raggiunto dipende dallo stato iniziale…
- …Altre volte, ci sono dei vincoli sottointesi

Esercizio: Previsioni del Tempo

Esercizio: Previsioni del Tempo

Nel caso delle previsioni del tempo:

Il tempo è bello o brutto, quindi la somma delle probabilità deve essere 1

- Partiamo dalle equazioni originali per l'equilibrio:

$$0.1x_g - 0.5x_b = 0$$
$$-0.1x_g + 0.5x_b = 0$$

- Una delle due equazioni può essere rimossa...
- ...Ma possiamo anche aggiungere $x_g + x_b = 1$

$$0.1x_g - 0.5x_b = 0$$
$$x_g + x_b = 1$$

Nel file `es_weather.m`:

- Determinate lo stato di equilibrio risolvendo il sistema lineare
- Verificate che coincide con lo stato raggiunto dalla simulazione

Equilibrio di Sistemi Tempo-Continui Lineari

Equilibrio di Sistemi Tempo-Continui Lineari

Una stanza è ventilata mediante una sola apertura:

- Sia T_o temperatura esterna, T_a quella dell'aria interna
- Sia T_w la temperatura dei muri

Il flusso di calore tra l'esterno e l'aria è dato da:

$$i_1 = \frac{1}{R_1}(T_o - T_a)$$

- Dove R_1 è la resistenza termica dell'apertura

Il flusso di calore tra l'aria e i muri è dato da:

$$i_2 = \frac{1}{R_2}(T_a - T_w)$$

- Dove R_1 è la resistenza termica tra l'aria ed i muri

Equilibrio di Sistemi Tempo-Continui Lineari

Per quanto riguarda le temperature:

- La temperatura dell'esterno e dei muri si suppone costante
- La temperatura dell'aria varia con i flussi di calore

In particolare vale la relazione:

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{C_a}(i_1 - i_2)$$

- Il flusso di calore i_1 va dall'esterno all'aria, mentre i_2 va dall'aria ai muri
- C_a è la capacità termica dell'aria

Per completezza, ricordiamo che:

$$i_1 = \frac{1}{R_1}(T_o - T_a) \qquad i_2 = \frac{1}{R_2}(T_a - T_w)$$

Equilibrio di Sistemi Tempo-Continui Lineari

Questo è un primo esempio di sistema dinamico tempo-continuo

I sistemi dinamici tempo continui sono descritti mediante equazioni differenziali

- Tipicamente, queste sono nella forma:

$$\dot{x} = f(x)$$

- Non sappiamo risolvere le equazioni differenziali...
- ...Vedremo come farlo verso la fine del corso

Possiamo però già osservare che:

- Per definizione all'equilibrio lo stato non varia...
- ...Il che vuol dire che le derivate si annullano

Il generale, un sistema tempo continuo all'equilibrio deve soddisfare:

$$f(x) = 0$$

Equilibrio di Sistemi Tempo-Continui Lineari

Nel nostro esempio abbiamo:

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{C_a}(i_1 - i_2) \qquad i_1 = \frac{1}{R_1}(T_o - T_a) \qquad i_2 = \frac{1}{R_2}(T_a - T_w)$$

Quindi, all'equilibrio avremo:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{C_a}(i_1 - i_2) \\ i_1 &= \frac{1}{R_1}(T_o - T_a) \\ i_2 &= \frac{1}{R_2}(T_a - T_w) \end{aligned}$$

- È un sistema di equazioni lineari in i_1, i_2, T_a

E questo sappiamo come risolverlo!

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Partiamo dal sistema originale:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{C_a}(i_1 - i_2) \\
i_1 &= \frac{1}{R_1}(T_o - T_a) \\
i_2 &= \frac{1}{R_2}(T_a - T_w)
\end{aligned}
$$

- Le variabili sono $i_1, i_2, T_a \ldots$
- …Ci conviene portarle a sx del segno =

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Partiamo dal sistema originale:

$$\frac{1}{C_a}(i_1 - i_2) = 0$$

$$i_1 + \frac{1}{R_1}T_a = \frac{1}{R_1}T_o$$

$$i_2 - \frac{1}{R_2}T_a = \frac{1}{R_2}T_w$$

- Ora possiamo portarlo in forma matriciale

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Partiamo dal sistema originale:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{C_a} & -\frac{1}{C_a} & \\ 1 & & \frac{1}{R_1} \\ & 1 & -\frac{1}{R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_a \\ i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1} T_o \\ -\frac{1}{R_2} T_w \end{pmatrix}$$

- Ogni riga è la trascrizione di una equazione
- Ogni colonna della matrice è associata ad una variabile…
- …Perché viene moltiplicata per tale variabile

Se chiamiamo la matrice $\boldsymbol{A}$ ed il termine noto $\boldsymbol{b}$, abbiamo:

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

- Possiamo risolverlo con una divisione sinistra!

Esercizio: Temperatura di una Stanza

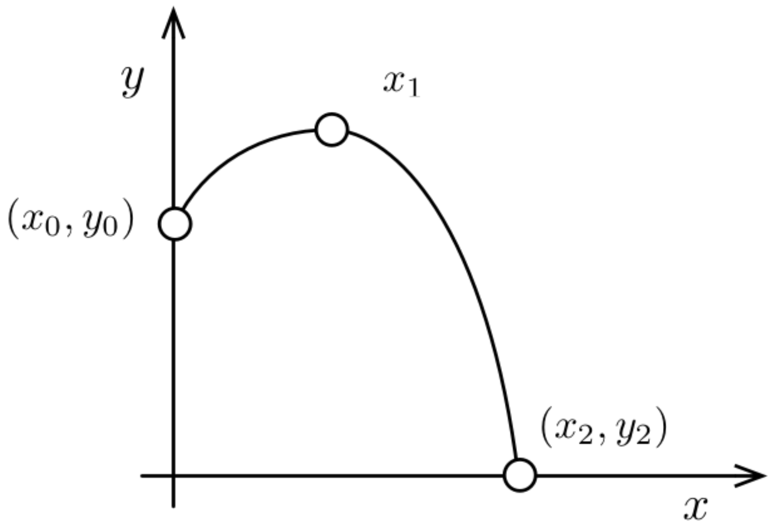
Partite dal file `es_temperature.m` nello start-kit

- Impostate la matrice dei coefficienti
- Impostate la colonna dei termini noti
- Risolvete il sistema per $T_o = 17, T_w = 21$ e per $T_o = 28, T_w = 21$
- Stampate il valore di T_a all'equilibrio

Problemi di Interpolazione (Vincolata)

Problemi di Interpolazione (Vincolata)

Si vuole progettare una arcata a ridosso di una parete verticale



La curva che descrive l'arcata:

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_0, y_0) sulla parete
- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_2, y_2) a terra
- Deve raggiungere l'altezza massima per $x = x_1$ (con x_1 noto)

Problemi di Interpolazione (Vincolata)

Un approccio: trattiamo la curva come una funzione $f(x)$

In questo modo possiamo tradurre le condizioni in equazioni:

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_0, y_0) sulla parete

$$f(x_0) = y_0$$

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_2, y_2) a terra

$$f(x_2) = y_2$$

- Deve raggiungere l'altezza massima per $x = x_1$ (con x_1 noto)

$$f'(x_1) = y_1$$

Così come sono ci dicono ben poco…

Tracciamento di Curve

Ci serve una assunzione sulla classe della funzione $f(x)$

Per esempio: $f(x)$ è polinomiale. Formalmente:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$$

Le nostre condizioni allora diventano:

$$\text{passaggio per } (x_0, y_0) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_0^i = y_0$$

$$\text{passaggio per } (x_1, y_1) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_2^i = y_2$$

$$\text{annullamento di } f'(x_1) \qquad \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i x_1^{i-1} = 0$$

Tracciamento di Curve

Ci siamo quasi! Guardiamole meglio:

passaggio per (x_0, y_0) $$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_0^i = y_0$$

passaggio per (x_1, y_1) $$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_2^i = y_2$$

annullamento di $f'(x_1)$ $$\sum_{i=1}^{n} i \alpha_i x_1^{i-1} = 0$$

Quali sono le incognite?

- Sono i parametri della funzione α_i e non le x!

Che grado di polinomio ci serve?

- Tre condizioni $\Rightarrow$ tre variabili, i.e. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ $\Rightarrow$ secondo grado

Tracciamento di Curve

In questo modo otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 &= y_0 \\ \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 &= y_2 \\ 2\alpha_2 x_1 + \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

- Che è lineare nelle incognite $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$

La tecnica vista è un metodo generale per progettare curve:

- Si ipotizza una struttura per la curva da costruire (e.g. polinomio)
- Si traducono i vincoli del problema in equazioni
- Si risolvono le equazioni per determinare i parametri
  - Per ora consideriamo il caso in cui le equazioni sono lineari

Esercizio: Progettazione di un'Arcata

Esercizio: Progettazione di un'Arcata

Consideriamo il sistema per il problema di progettazione dell'arcata:

$$\begin{aligned} \alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 &= y_0 \\ \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 &= y_2 \\ 2\alpha_2 x_1 + \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

A partire dal file `es_arc.m` nello start-kit:

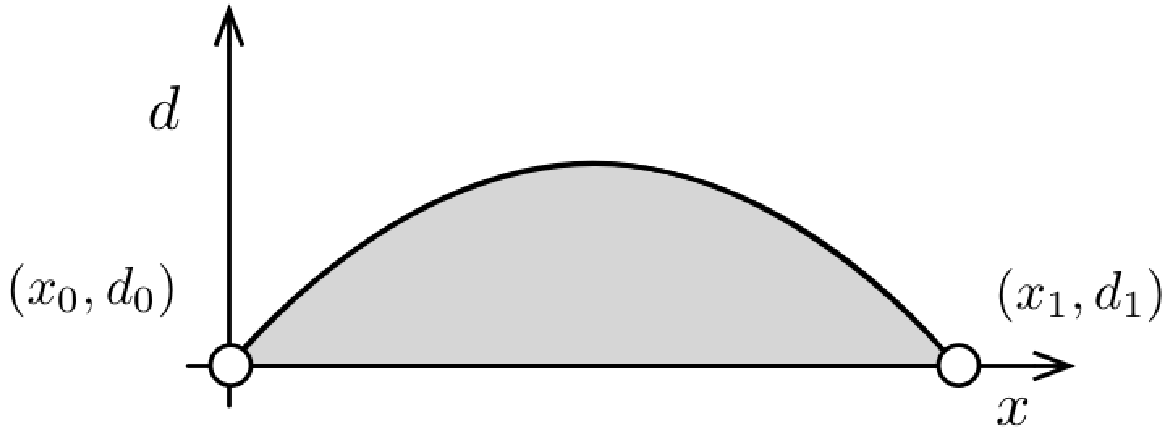
- Si determinino i coefficienti della curva risolvendo il sistema
- Si disegni la forma dell'arcata
- Si stampi a video il valore dell'altezza massima

Esercizio: Letto di un Fiume

Esercizio: Letto di un Fiume

Si vuole progettare lo scavo per il letto di un fiume

La sezione dello scavo deve presentarsi come segue:



- La coordinata x rappresenta una posizione orizzontale
- La coordinata d rappresenta la profondità dello scavo
  - Per questa ragione la sezione si presenta "al contrario"

Esercizio: Letto di un Fiume

Si vuole progettare lo scavo per il letto di un fiume

- La sezione deve essere descritta da una curva parabolica
- Deve passare per i punti noti (x_0, y_0) e (x_1, y_1)
- L'area della sezione determina la portata massima...
- ...E deve essere pari ad un valore prestabilito s_1

Se $f(x)$ è la funzione che descrive la curva, l'area della sezione è:

$$S = \int_{\underbrace{x_0}_{=0}}^{x_1} f(x)\, dx$$

A partire dal file `es_riverbed.m` nello start-kit:

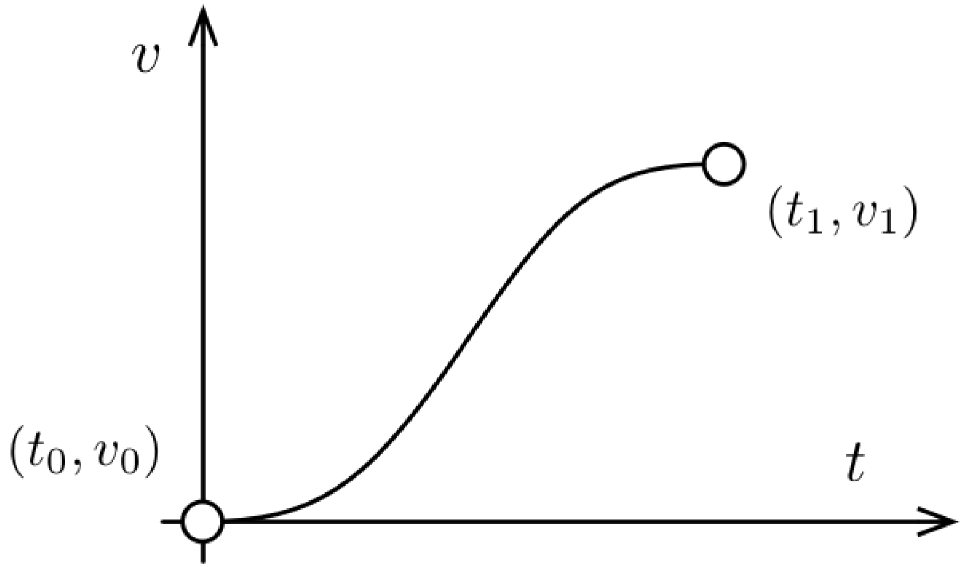
- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni la forma della sezione

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Si vuole controllare l'accelerazione di un carrello automatico

Il profilo di velocità in accelerazione deve presentarsi come segue:



- La coordinata t rappresenta il tempo
- La coordinata v rappresenta la velocità

Curve di questo tipo si utilizzano nelle centraline di controllo di auto e moto

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Si vuole controllare l'accelerazione di un carrello automatico

- Il profilo deve seguire un andamento polinomiale
  - Il grado del polinomio è da determinare
  - Servirà un coefficiente per ogni condizione specificata
- La velocità iniziale e finale ed il tempo di accelerazione t_1 sono noti
- Perché le variazioni non siano troppo brusca…
- …Si richiede che la derivata della velocità in t_0 e t_1 sia nulla

A partire dal file `es_acceleration.m` nello start-kit:

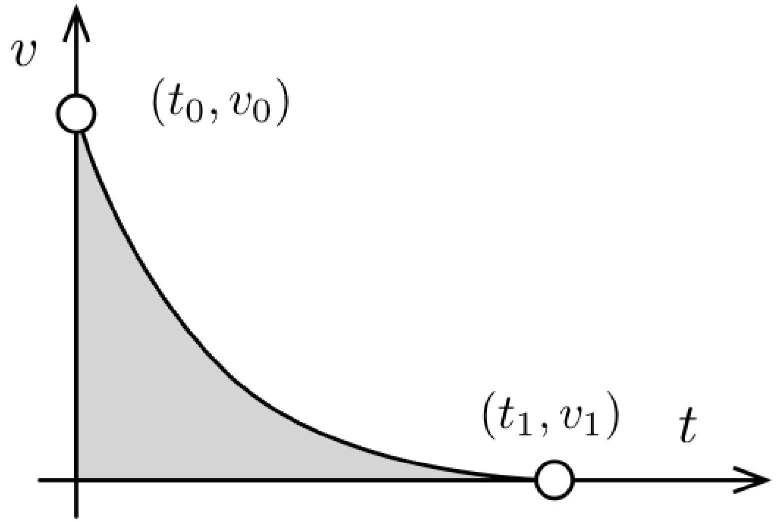
- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni il profilo della velocità in accelerazione

Esercizio: Controllo di Frenata

Esercizio: Controllo di Frenata

Si vuole controllare l'arresto di un carrello automatico

Il profilo di velocità in frenata deve presentarsi come segue:



- La coordinata t rappresenta il tempo
- La coordinata v rappresenta la velocità

Possiamo usare la curva per programmare una centralina di controllo

Esercizio: Controllo di Frenata

Si vuole controllare l'arresto di un carrello automatico

- Il profilo è dato da un polinomio, di grado da determinare
- La velocità iniziale e finale ed il tempo di frenata t_1 sono noti
- Si richiede che la derivata della velocità in t_1 sia nulla
- Lo spazio di frenata S deve essere pari ad un valore s_1, dove:

$$S = \int_{\underbrace{t_0}_{=0}}^{t_1} f(t)\, dt$$

A partire dal file `es_brake.m` nello start-kit:

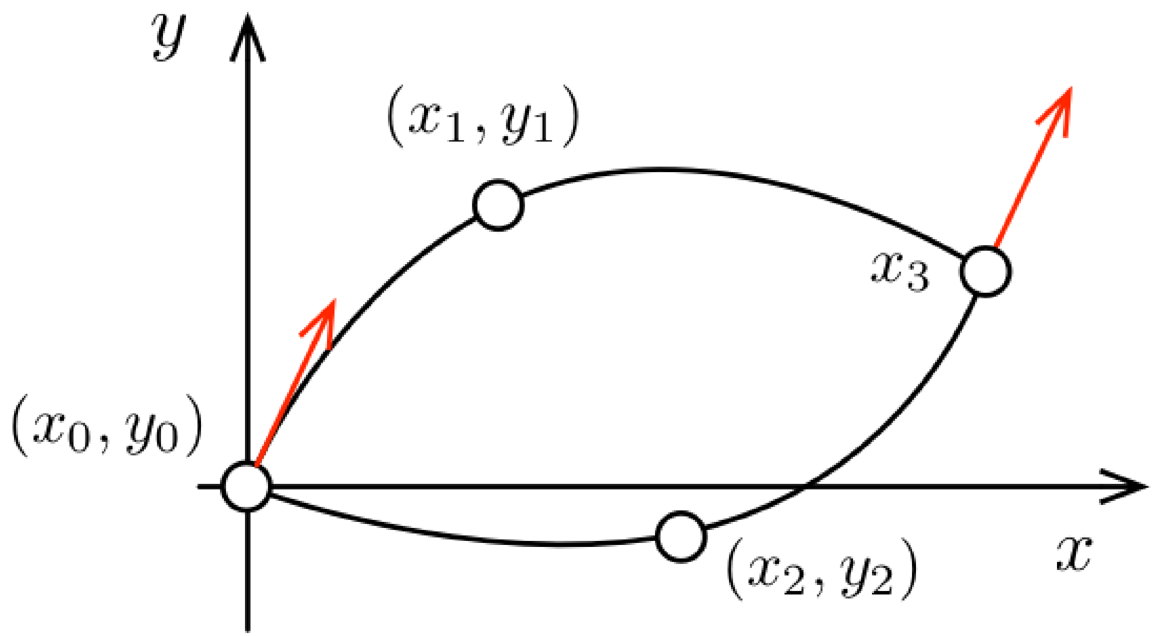
- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni il profilo della velocità in frenata

Esercizio: Progettazione di un Telaio

Esercizio: Progettazione di un Telaio

Si vuole progettare un telaio per una bicicletta

La forma del telaio deve apparire come segue:



Esercizio: Progettazione di un Telaio

Si vuole progettare un telaio per una bicicletta

- La forma del telaio è descritta da due curve paraboliche f_1 ed f_2
- Le due curve originano in un punto comune $(x_0 y_0)$
- La curva f_1 deve passare per l'ancoraggio della sella in (x_1, y_1)
- La curva f_2 deve passare per l'ancoraggio dei pedali in (x_2, y_2)
- Le due curve devono congiungersi in un punto (x_3, y_3)...
- ...Di cui è nota solo la coordinata x_3
- Le derivate di f_1 in x_0 ed f_2 in x_3 devono essere uguali

Esercizio: Progettazione di un Telaio

A partire dal file `es_frame.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti delle due curve
- Si disegni il profilo del telaio

Attenzione:

Ci sono due condizioni che coinvolgono entrambe le curve:

- Le due curve devono congiungersi in un punto $(x_3, ???)$
- Le derivate di f_1 in x_0 ed f_2 in x_3 devono essere uguali

Non possono essere formulate separatamente!

- Occorrerà definire un'unico sistema di equazioni…
- …in cui compaiono sia $f_1(x)$ che $f_2(x)$