Laboratorio di Informatica T (Ch8)

Funzioni come Argomento

Approssimazione di una Derivata

Consideriamo questo problema di derivazione numerica:

- Data una generica funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$…
- …Possiamo calcolare $f'(x)$?

Approssimazione di una Derivata

Consideriamo questo problema di derivazione numerica:

- Data una generica funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$…
- …Possiamo calcolare $f'(x)$?

Consideriamo due casi:

- Se x non è noto, non è facile capire cosa fare
- Ma se x è noto (i.e. $x = 1$), allora sappiamo che:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A questo punto:

- Se consideriamo un h molto piccolo…
- …Dovremmo ottenere una approssimazione decente

Scelta di h

Idealmente:

- Il valore di h dovrebbe essere più piccolo possibile…
- …Quindi $h = \varepsilon$, con $= $ il più piccolo numero rappresentabile

In realtà non è una grande idea:

- Tende a generare errori di cancellazione
- Molto meglio usare questo secondo approccio:

$$h = \begin{cases} \sqrt{\varepsilon}x & \text{if } |x| > tol \\ \sqrt{\varepsilon} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Dove tol è un valore di tolleranza

Proviamo a Codificarlo

Proviamo ad abbozzare una implementazione:

```
function df = derive(...)
  if abs(x) > 1e-6 % Scelta di h
    h = sqrt(eps) * x;
  else
    h = sqrt(eps)
  end
  df = 1/h * (f(x+h) - f(x)) % Calcolo della derivata
else
```

- Un parametro è **`x`** (il punto per cui calcolare la derivata)…

Proviamo a Codificarlo

Proviamo ad abbozzare una implementazione:

```
function df = derive(...)
  if abs(x) > 1e-6 % Scelta di h
    h = sqrt(eps) * x;
  else
    h = sqrt(eps)
  end
  df = 1/h * (f(x+h) - f(x)) % Calcolo della derivata
else
```

- …Ma il secondo parametro è `f` stessa!

Alcuni algoritmi utilizzano funzioni come parametri

Funzioni come Parametri

In Matlab si può fare:

In `derive`, trattiamo un parametro come un nome di funzione

```
function df = derive(f, x)
  if abs(x) > 1e-6 % Scelta di h
    h = sqrt(eps) * x;
  else
    h = sqrt(eps)
  end
  df = 1/h * (f(x+h) - f(x)) % Calcolo della derivata
else
```

- Notate che stiamo invocando `f` (si riconosce dalla parentesi)
- `f` è una variabile locale, che contiene una funzione

Funzioni come Parametri

In Matlab si può fare:

Da qualche parte dobbiamo definire f:

```
function y = f(x)
  y = ...
end
```

Quando invochiamo **`derive`** (e.g. con $x = 1$) non possiamo usare:

```
derive(f, 1)
```

- Se lo facciamo, Matlab crede che vogliamo eseguire **`f`**…
- …Mentre noi vogliamo solo passarlo!

Funzioni come Parametri

In Matlab si può fare:

Da qualche parte dobbiamo definire f:

```
function y = f(x)
  y = ...
end
```

Quando invochiamo **`derive`** dobbiamo usare una sintassi speciale:

```
derive(@f, 1)
```

- La `@` dice a Matlab che `f` non va eseguita…
- …Ma va "passata così com'è"

Funzioni come Parametri

Complessivamente abbiamo:

```
derive(f, 1) % Invocazione

function y = f(x) % Funzione da derivare
  y = ...
end

function df = derive(f, x) % Approssimazione della
  derivata
  df = ...
end
```

Come al solito, trovate il codice nello start-kit

Funzioni Anonime

Funzioni Anonime

Supponiamo di vole derivare:

$$f(x) = x^2 \log x$$

- A rigore, dovremmo definire:

```
function y = f(x)
  y = x.^2 .* log(x);
end
```

- Si può fare, ma è scomodo per una funzione così semplice!

Matlab ci fornisce un costrutto più compatto: le funzioni anonime

Funzioni Anonime

Si tratta di un modo alternativo per definire una funzione

La sintassi è:

```
@(<p1>, <p2>, ...) <espressone>
```

Il costrutto restituisce una funzione senza nome:

- `<p1>`, `<p2>`… sono i parametri formali
- La funzione denota il valore di `<espressione>`

Si può memorizzare la funzione in una variabile, e.g.:

```
f = @(x) x.^2 .* log(x);
```

- Inserisce nella variabile `f`…
- …Una funzione che, quando invocata, restituisce `x^2`

Funzioni Anonime

In prima battuta, potremmo pensare di scrivere:

```
f = @(x) x.^2 .* log(x);
derive(@f, 1)
```

In realtà, non funziona!

- La ragione è che `f` è già una variabile che contiene una funzione
- Quindi non c'è bisogno di dirlo di nuovo a Matlab

La forma corretta è quindi semplicemente:

```
f = @(x) x.^2 .* log(x);
derive(f, 1)   % Niente @!
```

Funzioni Anonime ed Ambienti

Funzioni Anonime ed Ambienti

A differenza della funzioni “normali”…

Le funzioni anomime hanno accesso alle variabili dell’ambiente in cui sono definite

Per esempio:

```
a = 9;
f = @(x) a .* x.^2;
```

- Una funzione “normale” potrebbe accedere solo ad **`x`** (il parametro)
- Una funzione anonima può accedere anche ad **`a`**!

Un Caso d'Uso Importante

Consideriamo ancora l'oscillatore (discretizzato) di Van Der Pol:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} + hy^{(t)}$$
$$y^{(t+1)} = y^{(t)} + h\left(\mu(1 - x^{(t)2})y^{(t)} - x^{(t)}\right)$$

…Ed il suo codice di simulazione:

```
X = [];
T = 1:1000; % Istanti di tempo
xc = [x0, y0]; % Stato iniziale
for t = T
    X(t, :) = xc; % Salvo lo stato corrente
    xc = f(xc, h, mu); % Genero lo stato futuro
end
```

- Lo abbiamo usato in tutti gli esercizi seguenti, e non è buona cosa

Funzioni come Argomenti

Per essere “puliti”, dovremmo definire una funzione

Per prima cosa, incapsuliamo il codice in una nuova funzione:

```
function X = simulate(...)
  X = [];
  T = 1:1000;
  xc = [x0, y0];
  for t = T
      X(t, :) = xc;
      xc = f(xc, h, mu);
  end
end
```

Funzioni come Argomenti

Per essere "puliti", dovremmo definire una funzione

Quindi, identifichiamo i parametri:

```
function X = simulate(..., T, ...)
  X = [];
  xc = [x0, y0];
  for t = T
      X(t, :) = xc;
      xc = f(xc, h, mu);
  end
end
```

- È bene che `T` sia un parametro…
- …Così possiamo definirlo al momento della chiamata

Funzioni come Argomenti

Per essere "puliti", dovremmo definire una funzione

Quindi, identifichiamo i parametri:

```
function X = simulate(f, T, X0)
  X = [];
  xc = X0;
  for t = T
      X(t, :) = xc;
      xc = f(xc, h, mu);
  end
end
```

- Lo stesso vale per lo stato iniziale `X0`…
- …Ed a maggior ragione per la funzione di transizione `f`

Funzioni come Argomenti

Per essere "puliti", dovremmo definire una funzione

Ci rimane ancora un problema:

```
function X = simulate(f, T, X0)
  X = [];
  xc = X0;
  for t = T
      X(t, :) = xc;
      xc = f(xc, h, mu); % <--- QUI!!
  end
end
```

- `h` e `mu` sono specifici per il nostro oscillatore…
- Finché appaiono nel codice, la nostra `simulate` non è davvero generica

Funzioni come Argomenti

Soluzione 1: includere `h` e `mu` nella definizione della funzione

```
function X = simulate(f, T, X0)
  X = [];
  xc = X0;
  for t = T
      X(t, :) = xc;
      xc = f(t, xc); % Passo solo lo stato
  end
end
```

- Passo anche il tempo `t`, è utile per alcuni sistemi…
- …E non è specifico di un particolare sistema

Funzioni come Argomenti

Soluzione 1: includere `h` e `mu` nella definizione della funzione

A parte avremo:

```
function xf = vdp(t, xc)
    h = 0.1; % Hard-coded nella funzione
    mu = 1; % Hard-coded nella funzione
    x = xc(1);
    y = xc(2);
    xf(1) = x + h * y;
    xf(2) = y + h * (mu * (1 - x^2)*y - x);
end
```

Funzioni come Argomenti

Soluzione 1: includere `h` e `mu` nella definizione della funzione

Nel complesso, potremmo avere:

```
T = 1:300;
X0 = [0.5, 0.5];
X = simulate(@vdp, T, X0); % Funzione come valore

function xf = vdp(t, xc)
    ...
end
```

Funziona, ma ha dei grossi difetti:

- `h` e `mu` sono hard-coded nella funzione **`vdp`**…
- …Se vogliamo provare valori diversi, dobbiamo ridefinire la funzione!

Funzioni Anonime e Funzioni Normali

Soluzione 2: usare una funzione anonima

Partiamo dalla versione corrente del codice:

```
function es_vdp()
    T = 1:300;
    X0 = [0.5, 0.5];
    X = simulate(@vdp, T, X0);
end

function xf = vdp(t, xc)
    h = 0.1;
    mu = 1;
    ...
end
```

Funzioni Anonime e Funzioni Normali

Soluzione 2: usare una funzione anonima

Ridefiniamo **`vdp`** in modo che riceva solo i parametri appropriati

```
function es_vdp()
    h = 0.1; % Spostato
    mu = 1; % Spostato
    T = 1:300;
    X0 = [0.5, 0.5];
    X = simulate(@vdp, T, X0);
end

function xf = vdp(xc, h, mu) % Parametri cambiati
    ...
end
```

Funzioni Anonime e Funzioni Normali

Soluzione 2: usare una funzione anonima

Definiamo una funzione anonima con l'interfaccia richiesta da **`simulate`**...

```
function es_vdp()
    h = 0.1; % Spostato
    mu = 1; % Spostato
    T = 1:300;
    X0 = [0.5, 0.5];
    f = @(t, x) ...; % Parametri corretti per "simulate"
    X = simulate(@vdp, T, X0);
end

function xf = vdp(xc, h, mu)
    ...
end
```

Funzioni Anonime e Funzioni Normali

Soluzione 2: usare una funzione anonima

…E che non faccia altro che chiamare **vdp**

```
function es_vdp()
    h = 0.1; % Spostato
    mu = 1; % Spostato
    T = 1:300;
    X0 = [0.5, 0.5];
    f = @(x, t) vdp(x, h, mu); % Chiama solo vdp!
    X = simulate(@vdp, T, X0);
end

function xf = vdp(xc, h, mu)
    ...
end
```

Funzioni Anonime e Funzioni Normali

Soluzione 2: usare una funzione anonima

```
function es_vdp()
    h = 0.1; % Spostato
    mu = 1; % Spostato
    T = 1:300;
    X0 = [0.5, 0.5];
    f = @(x, t) vdp(x, h, mu); % Chiama solo vdp!
    X = simulate(@vdp, T, X0);
end
```

Quando **`f`** viene eseguita, invoca **`vdp(x, h, mu)`**

- **`x`** è uno dei parametri di **`f`**, ma **`h`** e **`mu`** no
- Matlab li cerca nell'ambiente in cui **`f`** è definita!

Un Pattern

Useremo molto spesso le funzioni anonime in questo modo:

```
f = @(x, t) ftransition(x, ...)
X = simulate(f, ...)

function xf = ftransition(x, ...)
    ...
end
```

- Così **`ftransition`** ha solo i suoi parametri "naturali"…
- La funzione anonima **`f`** la "avvolge" (fa da wrapper)…
- …Ed espone l'interfaccia richiesta da **`simulate`**

Come al solito, trovate il codice nello start-kit

Es.: Oscillatore di Van Der Pol Forzato

Esercizio: Oscillatore di Van Der Pol Forzato

Consideriamo una variante dell'oscillatore di Van Der Pol

In particolare, vediamo la versione discretizza e "forzata":

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} + hy^{(t)}$$
$$y^{(t+1)} = y^{(t)} + h\left(\mu(1 - x^{(t)2})y^{(t)} - x^{(t)} - A\sin(\omega ht)\right)$$

Il termine $A\sin(\omega ht)$ si dice guida (driver):

- A è l'ampiezza dell'oscillazione guida
- ω è la sua frequenza
- t è il tempo
- h compare perché il tempo è discretizzato

Il valore della guida non dipende dallo stato, ma solo dal tempo

Oscillatore di Van Der Pol Forzato

Partendo dal file `es_forced_vdp.m` nello start-kit:

- Definite la funzione di transizione per l'oscillatore forzato:

```
function Xf = forced_vdp(X, t, omega, A, h, mu)
```

- Aggiungete il codice di simulazione
  - Aggiungete una funzione anonima, se necessario

Confrontate i risultati con l'oscillatore "normale" (in `es_dp.m`):

- Disegnate l'andamento di x nel tempo
- Disegnate la traiettoria (i.e. insieme dei valori di x e y visitati)

Come differiscono i due andamenti? E le due traiettorie?

Esercizio: Random Walk

Esercizio: Random Walk

Ricordate il nostro esempio di random walk 1D?

Formalmente, era caratterizzato dalla ricorsione:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} + d$$

- Dove:

$$d = \begin{cases} +1 & \text{con probabilità } p \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel file **`es_walk.m`** è definita la funzione di transizione, con interfaccia:

```
function xf = onestep(t, xc, p)
```

- Simulate il sistema utilizzando **`simulate`**
  - Aggiungete una funzione anonima (se necessario)
- Stampate a video la posizione finale
- Disegnate l'andamento della posizione nel tempo

Esercizio: Random Walk Multiple

Esercizio: Random Walk Multiple

La nostra random walk è un esempio di sistema stocastico

- Il comportamento è soggetto ad incertezza
- Ogni simulazione può avere un esito diverso

Ma in media come si comporta il sistema?

Per determinarlo possiamo:

- Simulare molte volte il sistema…
- …E quindi studiare i risultati

Per esempio possiamo:

- Calcolare la posizione finale media
- Disegnare un istogramma

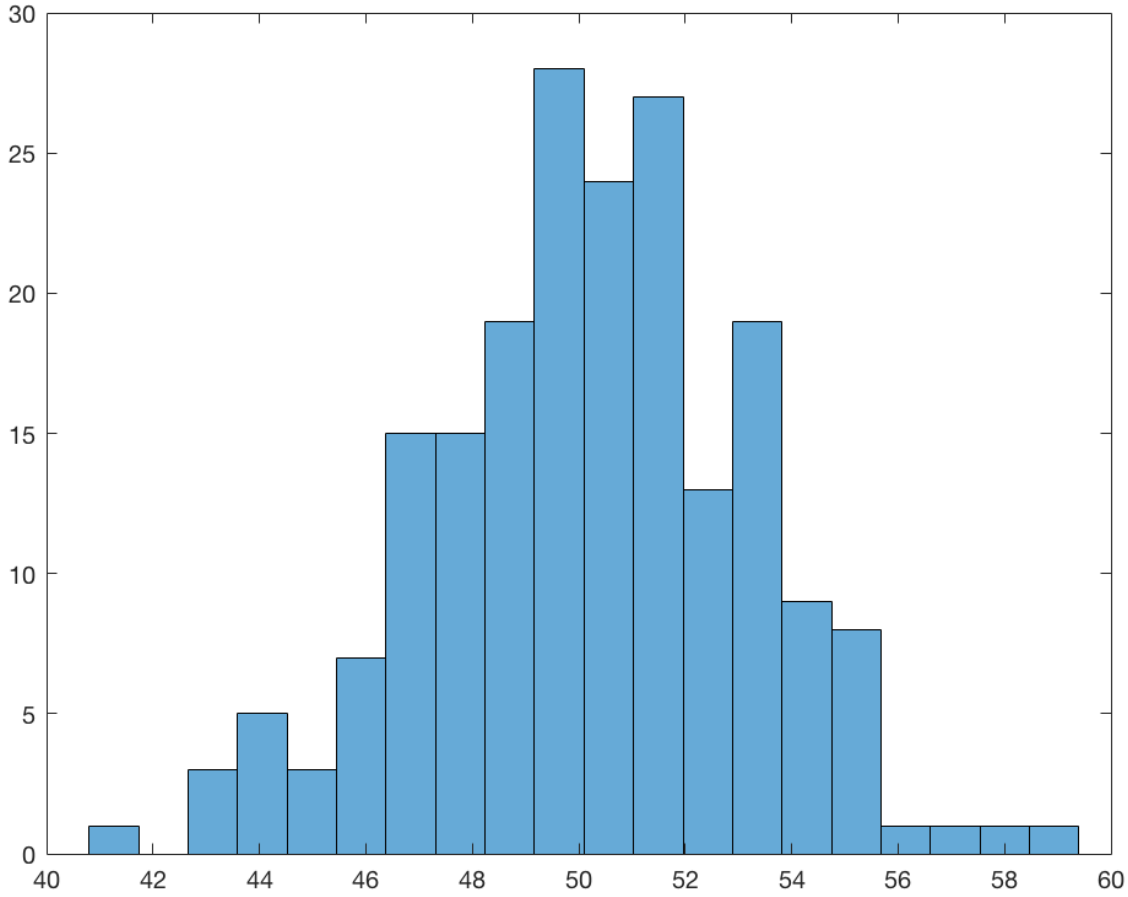
Istogrammi

Un istogramma è un grafico che si ottiene nel modo seguente:

- Dato una collezione di valori x_i
- Si divide il dominio D in intervalli uguali
- Si conta quanti valori x_i cadono in ciascun intervallo
- Per ogni intervallo, sia c_j il valore del conteggio
- Si disegnano su un grafico a barre i valori di c_j

Istogrammi

Un esempio (l'altezza di un neonato, campione di 200 valori)



Istogrammi

Un istogramma è un grafico che si ottiene nel modo seguente:

- Dato una collezione di valori x_i
- Si divide il dominio D in intervalli uguali
- Si conta quanti valori x_i cadono in ciascun intervallo
- Per ogni intervallo, sia c_j il valore del conteggio
- Si disegnano su un grafico a barre i valori di c_j

In Matlab potete usare:

```
histogram(X)     % X = vettore con i valori
histogram(X, M) % M = numero di intervalli
```

- Di default, Matlab calcola da solo quali intervalli usare

Esercizio: Random Walk Multiple

Nel file `es_many_walks.m`

- Simulare la nostra random walk N volte
- Memorizzare in un vettore tutte le posizioni finali raggiunte
- Disegnare un istogramma

Come varia l'istogramma al variare di p?

Esercizio: `arrayfun`

Esercizio: `arrayfun`

Matlab fornisce la funzione:

```
function y = arrayfun(f, x)
```

- Che applica la funzione `f` ad ogni elemento nel vettore `x`…
- …E restituisce i risultati in `y`

Nel file `es_arrayfun.m` si definisca una funzione:

```
function y = my_arrayfun(f, x)
```

…Che replichi il comportamento di quella di Matlab

- La funzione f da utilizzare per il testing è fornita nello start-kit
- Si disegni il grafico di f nell'intervallo $[-2, 2]$

Esercizio: Random Surfer

Esercizio: Random Surfer

Consideriamo un semplice modello per un utente web

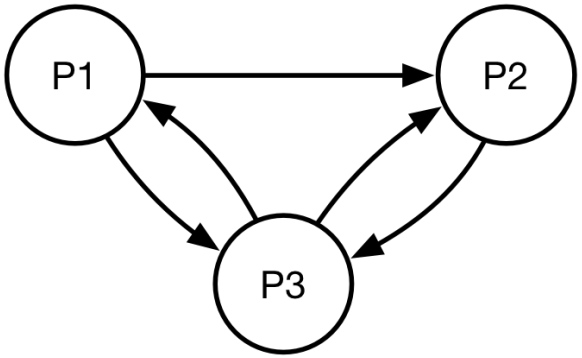
Il nostro utente si comporta così:

- Parte da una pagina scelta uniformemente a caso
- Ad ogni passo:
  - Con probabilità $1 - p$ l'utente clicca su un link a caso
  - Con probabilità p l'utente si stanca…
  - …E ricomincia da una pagina a caso
- Se non ci sono link in uscita, l'utente resta fermo

Esercizio: Random Surfer

Consideriamo un semplice modello per un utente web

Possiamo descrivere la rete come un grafo, e.g.:



- I nodi (i.e. le palline) rappresentano pagine
- Gli archi (i.e.) le freccette rappresentano i link
- Supponiamo di avere n pagine
- Chiamiamo $P_{i,j}$ la probabilità di cliccare sul link da j a i
  - Quindi, $P_{i,j} = 1/(\text{num. link in uscita da } j)$

Esercizio: Random Surfer

Proviamo a tradurlo in equazioni

Per lo stato, facciamo una scelta un po' strana:

- Una variabile x_i per ogni pagina, con $x_i \in [0, 1]$
- x_i rappresenta la probabilità che l'utente sia sulla pagina i

All'inizio, tutte le pagine sono equiprobabili:

- Quindi, per tutte le pagine $x_i = 1/n$

Esercizio: Random Surfer

Proviamo a tradurlo in equazioni

Calcolare lo stato futuro vuol dire:

- A partire delle probabilità $x_i^{(t)}$ di essere sulla pagina i…
- …Calcolare le probabilità future $x_i^{(t+1)}$

Formalmente, la probabilità $x_i^{(t)}$ di essere su i al passo $t+1$:

$$x_i^{(t+1)} = \underbrace{p}_{\text{mi stanco}} \overbrace{\frac{1}{n}}^{\text{reset}} + \underbrace{(1-p)}_{\text{non mi stanco}} \sum_{j=1}^{n} \overbrace{x_j^{(t)}}^{\text{sono su } j} \underbrace{P_{i,j}}_{\text{link per } i}$$

- È data dalla probabilità di finire su i dopo essersi stancati…
- …Più la probabilità di non stancarsi e finire su i da un'altra pagina

Esercizio: Random Surfer

Se ci fate caso, la funzione di transizione è lineare

Per i sistemi dinamici lineari, è comodo usare la notazione matriciale:

$$x^{(t+1)} = p\frac{1}{n} + (1-p)Px^{(t)}$$

- $x^{(t+1)}$ è il vettore (colonna) delle probabilità al tempo $t+1$
- $x^{(t)}$ è il vettore (colonna) delle probabilità al tempo t
- P è la matrice con le probabilità di transizione $P_{i,j}$

Vogliamo definire un simulatore per il modello appena visto

Esercizio: Random Surfer

Il file `es_surfer.m` nello start-kit:

Definisce la funzione:

```
function xf = browse(xc, P, p, n)
```

..Che implementa la ricorsione:

$$x^{(t+1)} = p\frac{1}{n} + (1-p)Px^{(t)}$$

- La formula matriciale assume che $x^{(t)}$ sia una colonna…
- …Mentre il vettore di stato è una riga
- Questo rende necessarie alcune trasposizioni

Definite il codice di simulazione:

- Disegnate su un'unica figure l'andamento di x_0, x_1, x_2 nel tempo
  - Quali sono alla fine le pagine su cui è più probabile trovarsi?

Esercizio: Random Surfer

Le probabilità finali:

- Rappresentano la probabilità di visita delle pagine
- Si potrebbero usare per capire quali pagine sono più importanti

È esattamente quello per cui il modello di esempio è nato!

Sapete chi l'ha inventato?

BTW: l'algoritmo si chiama pagerank

Esercizio: Previsioni del Tempo

Esercizio: Previsioni del Tempo

Vogliamo utilizzare un sistema dinamico per prevedere il tempo

Supponiamo che (sommariamente) valgano le regole seguenti:

- Se un giorno c'è bel tempo
  - Il giorno successivo sarà bello con il 90% di probabilità
  - Il giorno successivo sarà brutto con il 10% di probabilità
- Se un giorno c'è brutto tempo
  - Il giorno successivo sarà bello con il 50% di probabilità
  - Il giorno successivo sarà brutto con il 50% di probabilità

Esercizio: Previsioni del Tempo

Per lo stato, ragioniamo di nuovo in termini di probabilità:

- $x_g^{(t)}$ = probabilità che il tempo sia bello a t
- $x_b^{(t)}$ = probabilità che il tempo sia brutto a t

Per le transizioni, avremo:

$$x_g^{(t+1)} = x_g^{(t)} P_{g,g} + x_b^{(t)} P_{g,b}$$
$$x_b^{(t+1)} = x_g^{(t)} P_{b,g} + x_b^{(t)} P_{b,b}$$

- $P_{g,b}$ è la probabilità che il tempo sia brutto a t e bello a $t+1$, etc.
- Il sistema è di nuovo lineare. In forma matriciale possiamo scrivere:

$$x^{(t+1)} = P x^{(t)} \qquad \text{con: } P = \begin{pmatrix} P_{g,g} & P_{g,b} \\ P_{b,g} & P_{b,b} \end{pmatrix}$$

Esercizio: Previsioni del Tempo

Si parta dal file `es_weather.m` nello start-kit

Si definisca la funzione di transizione:

```
function xf = day(xc, P)
```

- Dove **`xc`** è lo stato corrente ($x_g^{(t)}, x_b^{(t)}$)…
- …E **`P`** è la matrice P di transizione…
- …Che deve essere definita come parte dell'esercizio

Si sviluppi il codice di simulazione:

- Si disegni l'andamento delle due probabilità (bel tempo/brutto tempo)
  - Nel codice, si assume inizialmente che il primo giorno sia brutto
  - In un secondo momento, provate l'alternativa opposta

Esercizio: Crescita Logistica

Esercizio: Crescita Logistica

Sia data una popolazione che segue il modello logistico

$$x^{(t+1)} = r^{(t)} \left(1 - \frac{x^{(t)}}{N}\right)$$

Dove:

- r indica il tasso di crescita (deve valere $r > 1$)
- N indica un valore di popolazione…
- …che, se raggiunto, ne causa il collasso immediato

Vogliamo studiare il comportamento del modello mediante simulazione

Esercizio: Crescita Logistica

A partire dal file `es_logi.m` nello start-kit:

Definite la funzione di transizione:

```
function xf = logi(xc, r, k)
```

- Che calcoli lo stato futuro **`xf`**
- …A partire da quello corrente **`xc`**, e dai valori di **`r`** e **`k`**

Definite il codice di simulazione:

- Lo stato iniziale è definito nel codice (e così l'intervallo di simulazione)
- Valori di partenza per **`r`** e **`k`** sono definiti nel codice
- Si disegni l'andamento dello stato nel tempo
- Si esplori cosa succede per vari valori di r, da 1.1 a 4.0

Esercizio: Un Modello Preda-Predatore

Esercizio: Un Modello Preda-Predatore

I modelli preda-predatore:

- Rappresentano la co-evoluzione di due popolazioni antagoniste
- E.g. prede-predatori, ma anche reazioni chimiche che si ostacolano

Tipicamente ci sono due elementi nel vettore dello stato:

- Il numero di "prede" H
- Il numero di "predatori" P

Simulando il sistema:

- Si può studiare il comportamento delle due popolazioni
- Si può verificare se vi sia un equilibrio stabile

Esercizio: Un Modello Preda-Predatore

Consideriamo questo modello preda-predatore:

$$H^{(t+1)} = \overbrace{r\left(1 - \frac{H^{(t)}}{k}\right) H^{(t)}}^{\text{crescita logistica}} - \overbrace{s\, H^{(t)} P^{(t)}}^{\text{prede eliminate}}$$

$$P^{(t+1)} = \underbrace{u\, P^{(t)}}_{\text{calo in assenza di prede}} + v\underbrace{\left(s\, H^{(t)} P^{(t)}\right)}_{\text{prede eliminate}}$$

- k è la massima popolazione di prede sostenibile
- s è la frazione di $H^{(t)}$ che un predatore può "mangiare"
- $u < 1$ è il ritmo di scomparsa dei predatori in assenza di prede
- v è il "bonus riproduttivo" per ogni preda "mangiata"

Esercizio: Un Modello Preda-Predatore

Nello start-kit, partite dal file `es_logi_pp.m`

Implementare la funzione di transizione:

```
function xf = logi_pp(xc, r, k, s, u, v)
```

- HP: `xc(1)` sia il numero di prede e `xc(2)` quello di predatori
- I valori di r, k, s, u, v sono già definiti nel codice

Definite il codice di simulazione nella funzione principale:

- Lo stato iniziale è riportato nel codice
- Disegnate l'andamento delle due popolazioni nel tempo
- Disegnate la traiettoria nello spazio degli stati

Esercizio: Un Modello Preda-Predatore

Provate a fare delle variazioni!

Aumentate e diminuite (solo) s:

- Cosa vi aspettate che succeda? Cosa succede?

Aumentate e diminuite (solo) r:

- Cosa vi aspettate che succeda? Cosa succede?

Aumentate e diminuite (solo) u:

- Cosa vi aspettate che succeda? Cosa succede?

Riuscite a spiegare intuitivamente le ragioni?

Esercizio: Gigi l'Ubriaco

Esercizio: Gigi l'Ubriaco

Dopo una serata di bagordi, Gigi deve tornare a casa a piedi

- All'inizio, Gigi si muove in una data direzione (verso casa)
- Ad ogni passo, Gigi mantiene la direzione con probabilità p
- Oppure cambia direzione, con probabilità $1 - p$

Intuitivamente p controlla il livello di sobrietà

- Con $p = 1$ Gigi è sobrio: cammina sicuro verso casa
- Con $p = 0.5$ Gigi ha bevuto più di qualche bicchiere di troppo…

Vogliamo osservare il moto di Gigi nel tempo

- Lo faremo modellando il moto come un sistema dinamico
- Usiamo un approccio stocastico (numeri pseudo-casuali)

Esercizio: Gigi l'Ubriaco

Cosa è lo stato $x^{(t)}$ per il nostro problema?

Lo $X^{(t)}$ deve contenere abbastanza informazioni per determinare $X^{(t+1)}$

- Quindi ci serve la posizione di Gigi
- Ma anche la direzione dell'ultimo movimento!

Lo stato è un vettore di due componenti:

$$X = (x, d)$$

…E vale la ricorsione:

$$d^{(t+1)} = \begin{cases} d^{(t)} & \text{con probabilità } p \\ -d^{(t)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} + d^{(t+1)}$$

Esercizio: Gigi l'Ubriaco

A partire dal file `es_drunkard.m` nello start-kit:

Definite la funzione di transizione:

```
function xf = f(t, xc)
```

- HP: `xc(1)` = posizione, `xc(2)` direzione dell'ultimo spostamento

Simulate l'andamento della posizione di Gigi nel tempo:

- Visualizzate come si evolve lo stato nel tempo
- L'andamento sembra più o meno realistico della nostra random walk originale?
- Cosa succede cambiando p?

Esercizio: Provaci ancora, Gigi!

Esercizio: Provaci ancora, Gigi!

Proviamo a studiare il "comportamento medio" di Gigi:

Nel file `es_many_drunkards.m`, come nel caso della random walk:

- Simulare N camminate
- Memorizziamo in un vettore tutte le posizioni finali raggiunte
- Disegniamo un istogramma

Come varia l'istogramma al variare di p?

Esercizio: Trovare Elementi in un Vettore

Esercizio: Trovare Elementi in un Vettore

Nel file di funzione `es_findidx.m`, definire la funzione:

```
function I = my_findidx(X, V)
```

- Con `X` scalare e `V` vettore, che restituisca nel vettore `I`…
- …Gli indici degli elementi che in `V` sono uguali a `X`

Per esempio:

```
V = [1, 2, 4, 2];
my_findidx(2, V)  % Denota [2, 4]
```

- Si implementi la funzione utilizzando un ciclo `for`

Esercizio: Trovare Elementi in un Vettore

Si verifichi la correttezza nella funzione principale `es_findidx`:

- Si utilizzino dei vettori di numeri interi casuali, ottenuti con `randi`

Come ottenere lo stesso risultato con le funzioni predefinite?

- Si determini un metodo e lo si sfrutti per fare un confronto
- Suggerimento: vi ricordate della funzione `find`?

Esercizio: Prodotto Matriciale

Esercizio: Prodotto Matriciale

Nel file di funzione **`es_mprod.m`**, si definisca la funzione:

Si definisca una funzione:

```
function Z = my_mprod(A, B)
```

- Che calcoli il prodotto matriciale di **`A`** e **`B`**

Si verifichi la correttezza:

- Nella funzione principale
- Utilizzando matrici di numeri casuali (attenzione alle dimensioni!)
- Confrontandosi con l'operatore di prodotto in Matlab

Suggerimento: ogni prodotto riga/colonna è un prodotto scalare!

Esercizio: Scorrimento Circolare

Esercizio: Scorrimento Circolare

Nel file di funzione `es_shift.m`, definite la funzione:

```
function W = my_shift(V)
```

- Deve restituire un vettore `W`, identico a `V`…
- …Ma con gli elementi spostati a sx di una posizione…
- …E in modo circolare: il primo elemento diventa l'ultimo

Per esempio:

```
my_shift([1, 2, 3, 4])  % Denota [2, 3, 4, 1]
```

Esercizio: Scorrimento Circolare

Verificate la correttezza:

- Utilizzate vettori casuali o inseriti a mano
- Controllate il risultato visivamente

Suggerimento:

- Si può implementare la funzione scambiando gli elementi consecutivi
- …Ossia scambiando `W(ii)` con `W(ii+1)` in sequenza