Laboratorio di Informatica T (Ch13)

Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

ODE e Sistemi Dinamici

Una equazione differenziale ordinaria (ODE) è definita da:

$$\dot{x} = f(t, x)$$

- Dove t è una variabile scalare
- x è una funzione di t, potenzialmente con valori vettoriali, i.e.:

$$x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$$

- $\dot{x}$ è la derivata di x in t

Informalmente, una eq. diff. ord. definisce un sistema dinamico

- x è lo stato del sistema, che evolve nel tempo t
- f specifica come la derivata di x dipenda dallo stato e dal tempo
- Il tempo è una variabile continua $\Rightarrow$ il sistema è tempo-continuo

Riduzione al Primo Ordine

È sufficiente limitarsi alla derivata del primo ordine

- Se ci sono derivate di ordine maggiore, e.g. $\ddot{x}$...
- ...Possono essere sempre ricondotte al primo ordine...
- ...Introducendo un elemento di stato per ogni derivata intermedia

Per esempio:

$$\ddot{x} = at^2$$

Introducendo $y = \dot{x}$, diventa:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ at^2 \end{pmatrix}$$

- Caso tipico: $x =$ posizione, $y =$ velocità

Problemi ai Valori Iniziali

Quando si risolve una ODE, l'obiettivo è determinare x

Ma x è una funzione! Quindi vogliamo determinarne l'andamento

- Per farlo, è necessario fare alcune assunzioni addizionali...
- ...Per esempio, possiamo specificare un valore iniziale

In questo modo otteniamo un problema ai valori inziali:

$$\dot{x} = f(t, x)$$
$$x(0) = x_0$$

Intuitivamente, si tratta di simulare il sistema dinamico

- Poiché il sistema è tempo-continuo, f non determina lo stato futuro...
- ...Ma il modo in cui lo stato varia (i.e. la sua derivata)

ODE in Matlab

Matlab mette a disposizione diversi risolutori di ODE

Quello che utilizzeremo principalmente è accessibile mediante:

```
function [T, X] = ode45(f, tspan, x0)
```

Per quanto riguarda i parametri di ingresso/uscita:

- **`f`** è la funzione che definisce la ODE. La sua interfaccia deve essere:

```
function dx = f(t, x)
```

- **`t`** è il "tempo"
- **`x`** è lo stato corrente (un vettore)
- **`dx`** è la derivata dello stato corrente (un vettore colonna)

ODE in Matlab

Matlab mette a disposizione diversi risolutori di ODE

Quello che utilizzeremo principalmente è accessibile mediante:

```
function [T, X] = ode45(f, tspan, x0)
```

Per quanto riguarda i parametri di ingresso/uscita:

- `tspan` è un vettore con i due estremi dell'intervallo di simulazione
  - E.g. `tspan = [0, 3600]`
- `x0` è lo stato iniziale
- `T` contiene tutti gli istanti di tempo visitati dall'algoritmo
- Ogni riga della matrice `X` contiene uno stato visitato
  - Esattamente come per la nostra vecchia `simulate`

Esempio: L’Auguste Piccard PX-8

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

L'attrattiva principale dell'Expo 1964 fu un sottomarino

- Faceva immersioni con passeggeri nel Lago di Ginevra

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

Per muoversi in verticale un sottomarino carica/scarica acqua

In questo modo esso varia la sua densità

- Se la densità è maggiore di ρ, il sottomarino "cade" nel fluido
- Se è minore, il sottomarino "cade" verso l'alto
- Se è uguale, il sottomarino si muove per inerzia

Per precisione, il sottomarino è soggetto a tre forze principali:

- La forza di gravità, che lo accelera verso il basso
- La forza di galleggiamento, che lo accelera verso l'alto
- L'attrito aerodinamico dell'acqua (trascinamento)

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

Sia L il volume dell'acqua a bordo, allora abbiamo che:

La forza di gravità è data da (asse cartesiano orientato verso l'alto):

$$F_g = -g(m + \rho L)$$

- m è la massa del sottomarino
- g è l'accelerazione di gravità
- ρ è la densità dell'acqua

La forza di galleggiamento è data da (principio di Archimede):

$$F_b = g\rho V$$

- V è il volume del sottomarino

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

Sia L il volume dell'acqua a bordo, allora abbiamo che:

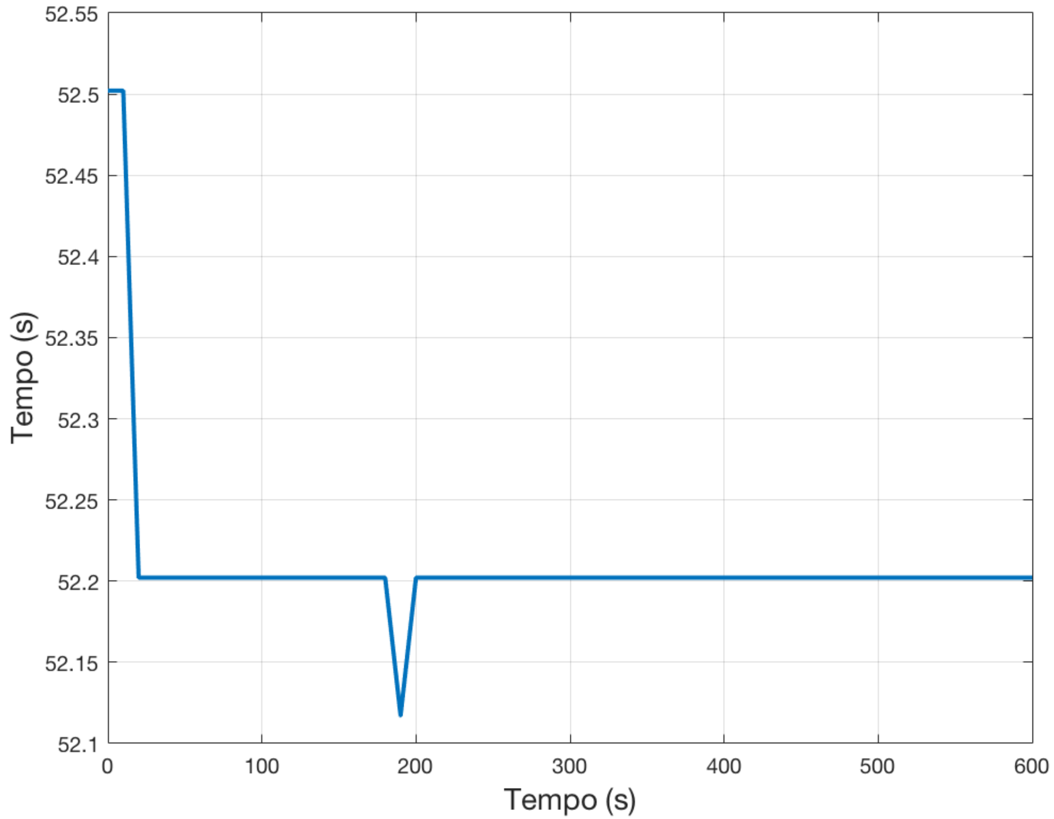
- L'attrito aerodinamico dell'acqua (trascinamento) è dato da:

$$F_t = -\frac{1}{2}\rho A C_D\, v|v|$$

- A è l'area della sezione
- C_D è un coefficiente che dipende dalla forma
- v è la velocità
  - Il prodotto $v|v|$ ha lo stesso segno di v…
  - …ed il valore assoluto di v^2

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

Supponiamo che l'acqua a bordo vari nel modo seguente:



- Il valore $L \simeq 52.2$ bilancia le forze di gravità e galleggiamento

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

In pratica, L varia secondo una funzione lineare a tratti

- In Matlab la si può valutare con `interp1`
- I punti `Tp` e `Lp` che definiscono la funzione sono in `es_submarine.m`
- Il file contiene anche tutte le informazioni sul PX-8

Si desidera calcolare la quota del PX-8 nel tempo

- Questa è regolata dall'equazione differenziale:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m + \rho L}(F_g + F_b + F_t)$$

- La quota iniziale x_0 è $-5\ m$
- In particolare, quale è la quota dopo 10, 20 e 30 minuti?

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

Dobbiamo risolvere un problema ai valori iniziali

Per farlo, dovremo invocare:

```
function [T, X] = ode45(f, tspan, x0)
```

Quindi dobbiamo determinare:

- Come descrivere lo stato X del sistema
  - Una buona scelta: $X = (\text{posizione, velocità})$
- L'intervallo di simulazione
  - Una buona scelta: $[0, 1800]$ (30 minuti)
- La funzione `f` che ne calcola la derivata

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

Per definire `f` è utile procedere nel solito modo:

- Prima definiamo una funzione che calcoli la derivata dello stato…
- …A partire da tutti i dati del problema

```
function dx = dstate(t,x,g,V,M,rhoW,Cd,S,Tp,Lp)
    % x(1) = altitudine, x(2) = velocita'
    Fb = g * rhoW * V; % Galleggiamento
    L = interp1(Tp, Lp, t); % Carico d'acqua
    Fg = -(g*M + g*rhoW * L); % Gravità
    Ft = -0.5 * x(2) * abs(x(2)) * Cd * S * rhoW;
    % Calcolo le derivate
    dx(1) = x(2);
    dx(2) = (Fb+Fg+Ft) / (M + rhoW * L);
end
```

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

Per definire `f` è utile procedere nel solito modo:

- Quindi definiamo una funzione anonima…
- …Che esponga solo due parametri (i.e. t ed X)

La funzione anonima potrà essere utilizzata per invocare **`ode45`**

```
dX = @(t, x) dstate(t,x,g,V,M,rhoW,Cd,S,Tp,Lp)';
x0 = [-5, 0]; % Stato iniziale
tspan = [0, 1800];
[t, X] = ode45(dX, tspan, x0);
```

- Notate che **`dX`** deve restituire un vettore colonna…
- …Per questa ragione trasponiamo il risultato di **`dstate`**
- Ricordate che la quota iniziale è $-5\ m$

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

A questo punto possiamo recuperare quota e velocità

```
x = X(:, 1); % Quota (prima colonna)
v = X(:, 2); % Velocità (seconda colonna)
```

Possiamo disegnare l'andamento della quota:

```
plot(t, x)
```

Esempio: L'Auguste Piccard PX-8

A questo punto possiamo recuperare quota e velocità

```
x = X(:, 1); % Quota (prima colonna)
v = X(:, 2); % Velocità (seconda colonna)
```

Ed ottenere la quota dopo 10, 20, 30 minuti:

```
x10 = interp1(t, x, 10 * 60)
x20 = interp1(t, x, 20 * 60)
x30 = interp1(t, x, 30 * 60)
```

- Usiamo **`interp1`** perché la "funzione quota" **`x`** è definita per punti

Esercizio: BMW-i8

Esercizio: BMW-i8

Una BMW i8 accelera a tavoletta su un rettilineo

Esercizio: BMW-i8

Una BMW i8 accelera a tavoletta su un rettilineo

Supponiamo che il motore eroghi una forza costante F

- L'auto ha un motore elettrico, così l'assunzione non è così irrealistica

Si oppone alla direzione del moto la forza di trascinamento:

$$F_t = -\frac{1}{2}\rho C_D S v|v|$$

- ρ è la densità dell'aria, v è la velocità
- S è la superficie della sezione dell'auto
- C_D è un coefficiente di trascinamento

Esercizio: BMW-i8

Quindi il sistema è definito dall'ODE:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}(F + F_t)$$

- Dove m è la massa dell'auto

Tutti i dati sono nel file `es_bmw.m`

- Si determini l'andamento di velocità e posizione per 60 sec
- Si disegni l'andamento della velocità
- Si determini il tempo necessario per raggiungere i 27.8 m/s
- Si determini la strada percorsa in tale tempo
- Si determini la massima velocità raggiunta

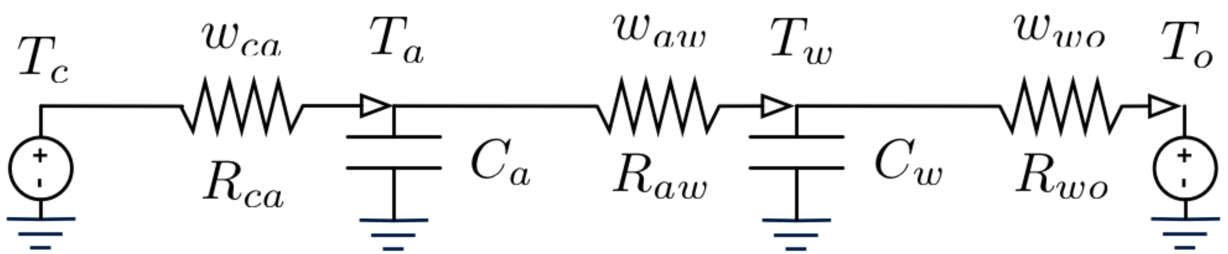
Esercizio: Riscaldamento di una Stanza (2)

Esercizio: Riscaldamento di una Stanza (2)

Vogliamo riscaldare una stanza con un convettore

- Il convettore riscalda l'aria, che sua volta riscalda i muri
- …Che disperdono parte del calore verso l'esterno
- La temperature del convettore e dell'esterno sono costanti
- L'aria della stanza ed i muri hanno capacità termiche non trascurabili

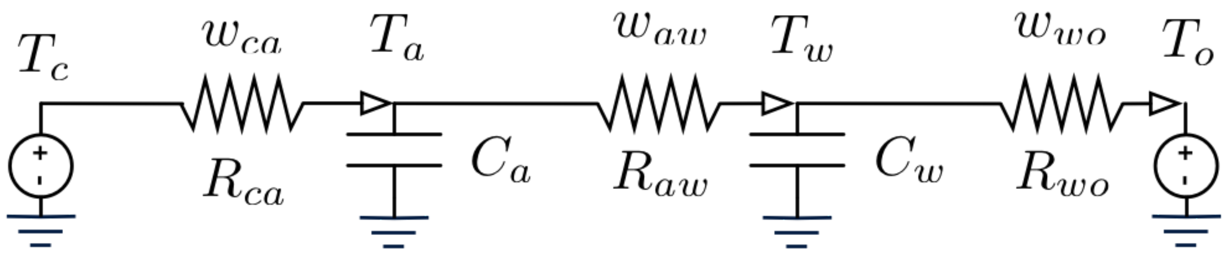
Possiamo modellare il sistema utilizzando un circuito RC equivalente:



- Cerchi = generatori di tensione (temperature)
- Zig-zag = resistenze (resistenze termiche)
- Linee parallele = capacitori (capacità termiche)

Esercizio: Riscaldamento di una Stanza (2)

Vogliamo ottenere un modello tempo-continuo

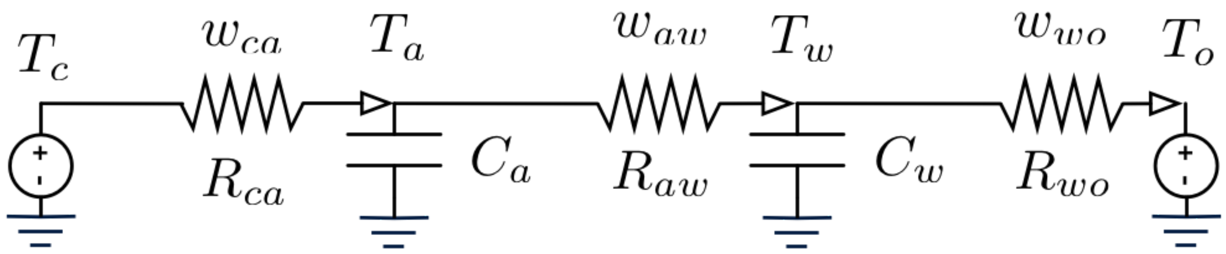


Ogni capacità si può modellare con una equazione differenziale:

$$\dot{T}_a = \frac{1}{C_a}(w_{ca} - w_{aw}) \qquad \dot{T}_w = \frac{1}{C_w}(w_{aw} - w_{wo})$$

Esercizio: Riscaldamento di una Stanza (2)

Vogliamo ottenere un modello <u>tempo-continuo</u>



I flussi invece si calcolano mediante equazioni lineari:

$$w_{ca} = \frac{1}{R_{ca}}(T_c - T_a)$$

$$w_{aw} = \frac{1}{R_{aw}}(T_a - T_w)$$

$$w_{wo} = \frac{1}{R_{wo}}(T_w - T_o)$$

Esercizio: Riscaldamento di una Stanza (2)

Quindi nel complesso abbiamo le equazioni differenziali:

$$\dot{T}_a = \frac{1}{C_a}(w_{ca} - w_{aw}) \qquad \dot{T}_w = \frac{1}{C_w}(w_{aw} - w_{wo})$$

Dove:

$$w_{ca} = \frac{1}{R_{ca}}(T_c - T_a)$$

$$w_{aw} = \frac{1}{R_{aw}}(T_a - T_w)$$

$$w_{wo} = \frac{1}{R_{wo}}(T_w - T_o)$$

Esercizio: Riscaldamento di una Stanza (2)

Tutti dati del problema sono disponibile ne file `es_heating2.m`

- Assumendo che i valori iniziali di T_a e T_w siano noti…
- …vogliamo determinare l'andamento delle temperature per 2 ore
- Si disegni su un unico grafico l'andamento di T_a e T_w
- Si determini la temperatura finale dell'aria e dei muri
- Si determini la temperature dell'aria e dei muri dopo un'ora
- Si determini il tempo necessario perché l'aria raggiunga i 20°C

Esercizio: Dalla Terra alla Luna

Esercizio: Dalla Terra alla Luna

Nel libro di Jule Verne “Dalle Terra alla Luna”…

- …Il veicolo con i protagonisti viene “sparato” verso la Luna

Esercizio: Dalla Terra alla Luna

Durante il viaggio, la navicella è soggetta a forze gravitazionali

Esse sono regolate dalla legge di gravitazione di Newton:

$$F_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}\|r_{12}\|}$$

- F_{12} è la forza esercitata dal corpo 2 sul corpo 1
- G è la costante di gravitazione
- m_1 ed m_2 sono le masse del corpo 1 e 2
- r_{12} è la distanza dal corpo 1 al corpo 2, i.e.

$$r_{12} = x_1 - x_2$$

  - x_1 e x_2 sono le posizioni di 1 e 2
  - Funziona per scalari (la forma vettoriale è leggermente diversa)

Esercizio: Dalla Terra alla Luna

Si desidera modellare il moto della navicella

- Assumiamo per semplicità che la Terra e la Luna siano in fisse
- Quindi la nave viaggerà lungo una traiettoria verticale
- Il moto sarà regolato dell'equazione differenziale:

$$\ddot{x} = \frac{1}{m_s}(F_{se} + F_{sm})$$

- m_s è la massa della navicella
- F_{se} è l'attrazione esercitata dalla Terra sulla navicella
- F_{sm} è l'attrazione esercitata dalla Luna sulla navicella

Esercizio: Dalla Terra alla Luna

Inoltre, assumiamo che:

- Il centro della Terra abbia quota 0
- La navicella parta da una quota r_E (i.e. il raggio della Terra)

La navicella deve così raggiungere la quota $D - r_M$

- Con $D =$ distanza Terra-Luna e $r_M =$ raggio lunare

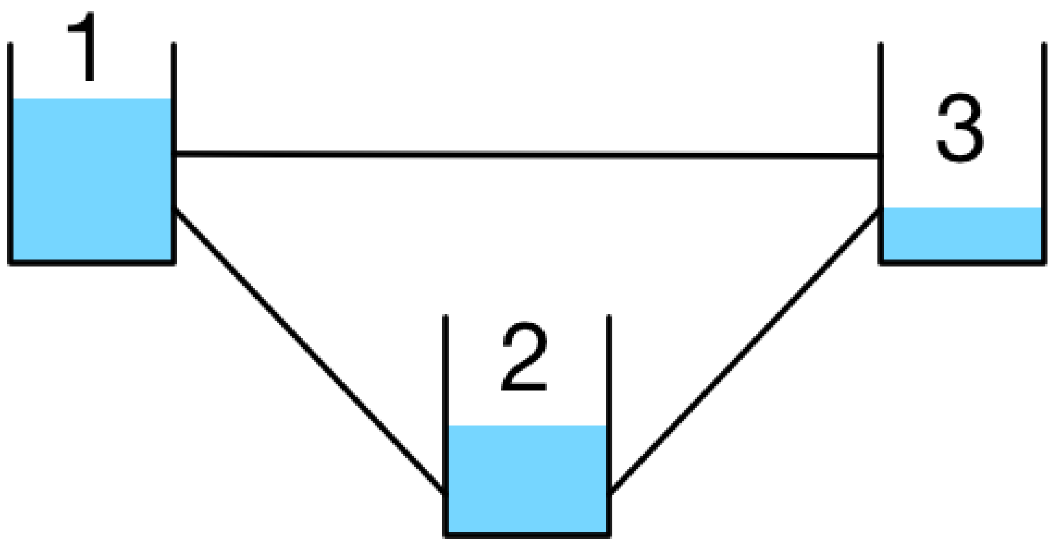
I dati del problema sono nel file `es_moonshot.m`

- Si disegni l'andamento della quota della navicella
  - Come velocità iniziale, si usino sia $11,000\, m/s$ che $11,100\, m/s$
  - Si verificano problemi di calcolo? Perché?
- Si determini la quota massima raggiunta: è superiore a $D - r_M$?

Esercizio: Serbatoi Comunicanti

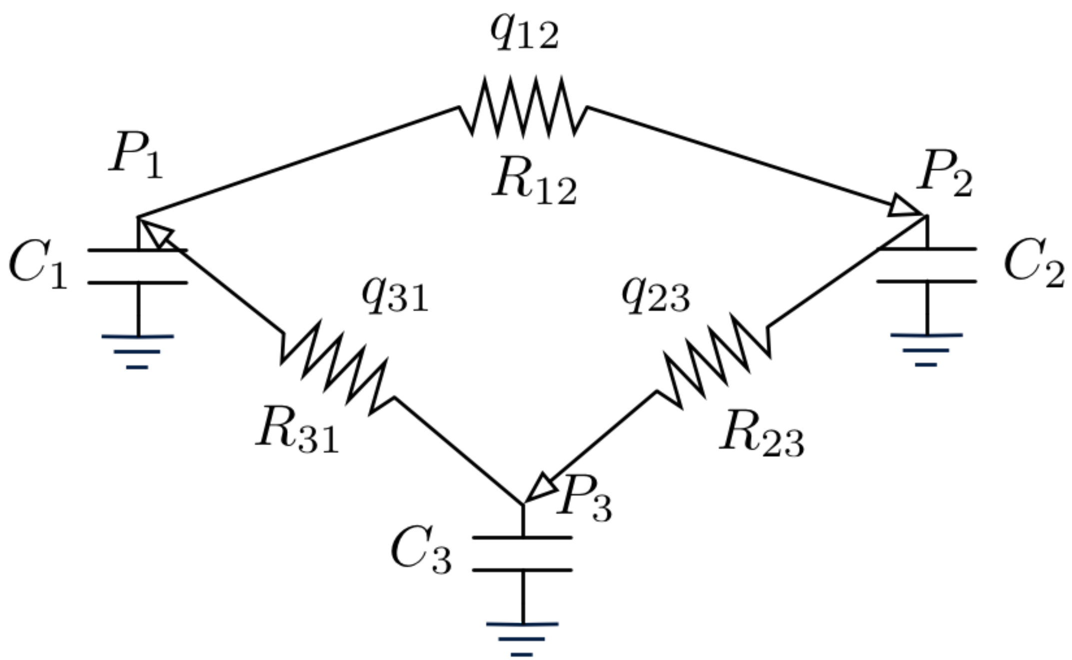
Esercizio: Serbatoi Comunicanti

Tre serbatoi comunicano attraverso condotte



Esercizio: Serbatoi Comunicanti

Tre serbatoi comunicano attraverso condotte



- Il problema può essere modellato con un circuito RC
- Serbatoi = capacitori, resistenze = condotte
- Flussi = correnti, Differenza di pressione = differenza di tensione
- Il modello è approssimativo, ma a noi basterà

Esercizio: Serbatoi Comunicanti

Il sistema è descritto dalle equazioni differenziali:

$$\dot P_1 = \frac{1}{C_1}(q_{31} - q_{12}) \qquad \dot P_2 = \frac{1}{C_2}(q_{12} - q_{23})$$

$$\dot P_2 = \frac{1}{C_3}(q_{23} - q_{31})$$

Con:

$$q_{12} = \frac{1}{R_{12}}(P_1 - P_2) \qquad q_{23} = \frac{1}{R_{23}}(P_2 - P_3)$$

$$q_{31} = \frac{1}{R_{31}}(P_3 - P_1)$$

Esercizio: Serbatoi Comunicanti

Tutti i dati del problema sono nel file `es_tubes.m`

- Assumendo che tutte le pressioni iniziali siano note…
- …Si determini e disegni l'andamento delle tre pressioni nel tempo
- Si determini la pressione nel serbatoio 1 dopo 600 minuti
- Dopo quanto tempo la differenza tra P_1 e P_2 è minore di 10^{-1}?