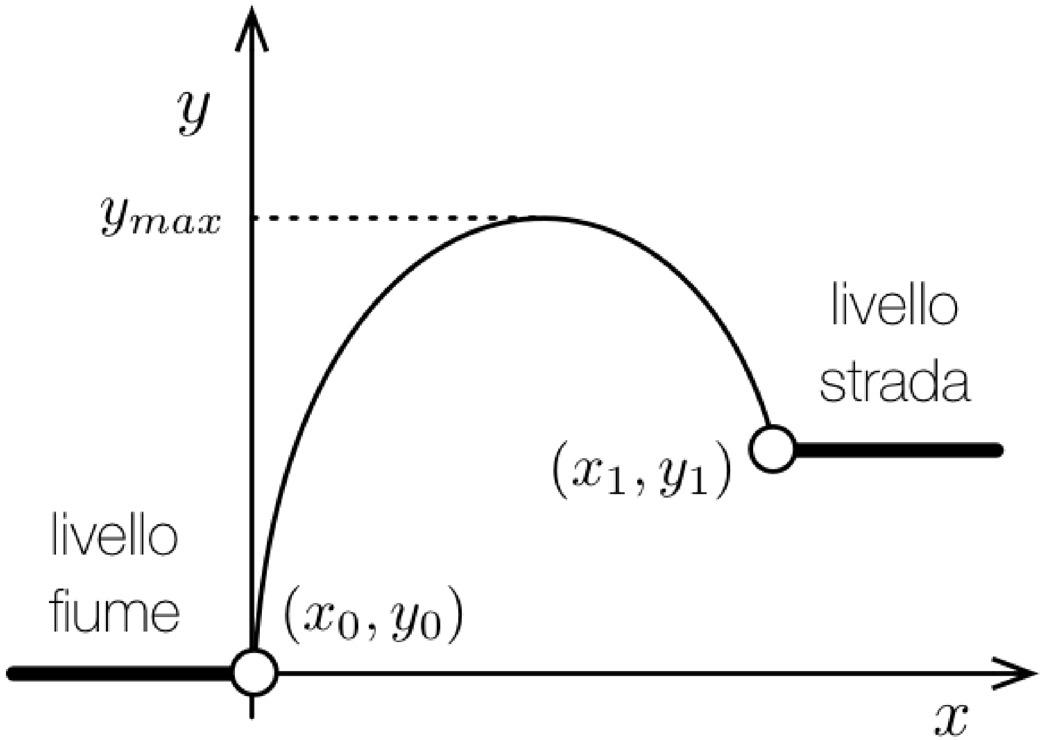
Laboratorio di Informatica T (Ch11)

Equazioni (e Sistemi) Non Lineari

Esempio: Argine di un Fiume

Supponiamo di dover progettare l'argine di un fiume



- Alle ascisse abbiamo una posizione orizzontale x
- Alle ordinate abbiamo l'altezza y

Esempio: Argine di un Fiume

L'argine deve:

- Essere definito da una curva parabolica
- Toccare il fiume in una posizione nota (x_0, y_0)
- Raggiungere il livello della strada nel punto (x_1, y_1)
- Raggiungere l'altezza massima $y_{max} \ldots$
- In un punto di coordinata x_2 non nota

Di fatto, si tratta di progettare/tracciare una curva

- Allora possiamo provare a risolverlo…
- …Impostando un insieme di equazioni

Equazioni per il Problema

Proviamo a formulare equazioni per le condizioni da rispettare:

- La curva deve passare per il punto (x_0, y_0):

$$\alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = y_0$$

- La curva deve passare per il punto (x_1, y_1):

$$\alpha_2 x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_0 = y_1$$

- La curva raggiungerà il max nel punto x_2 in cui la derivata si annulla:

$$2\alpha_2 x_2 + \alpha_1 = 0$$

- In corrispondenza di x_2, l'altezza dovrà essere y_{max}:

$$\alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 = y_{max}$$

Equazioni per il Problema

Nel complesso, abbiamo:

$$\begin{aligned} \alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 &= y_0 \\ \alpha_2 x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_0 &= y_1 \\ 2\alpha_2 x_2 + \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 &= y_{max} \end{aligned}$$

- Le variabili sono $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$, ma anche x_2
- Ci sono delle espressioni non lineari, i.e. $\alpha_2 x_2, \alpha_2 x_2^2, \alpha_1 x_2$

In sostanza, abbiamo un sistema di equazioni non lineari:

- Quindi, non possiamo impostare il problema in forma matriciale!

Equazioni Non Lineari in Matlab

Equazioni Non Lineari in Matlab

Per risolvere equazioni non lineari Matlab offre due funzioni:

```
function [X, FVAL, FLAG] = fzero(F, X0)
function [X, FVAL, FLAG] = fsolve(F, X0)
```

Entrambe risolvono equazioni nella forma:

$$f(x) = 0$$

- In altre parole, cercano di trovare un valore di x...
- ...Che azzeri la funzione $f(x)$
- Procedono in moto iterativo
- Una di esse (`fsolve`) potrebbe non convergere

Una soluzione dell'equazione è detta uno zero della funzione

Equazioni Non Lineari in Matlab

Per risolvere equazioni non lineari Matlab offre due funzioni:

```
function [X, FVAL, FLAG] = fzero(F, X0)
function [X, FVAL, FLAG] = fsolve(F, X0)
```

Per quanto riguarda i parametri, abbiamo che:

- `X0` è la stima iniziale di x da cui partire
- `F` è la funzione da azzerare (passata come parametro)
- `F` deve avere un singolo parametro, i.e.:

```
function z = F(X)
```

- Il parametro (i.e `X`) corrisponde alla variabile x

Equazioni Non Lineari in Matlab

Per risolvere equazioni non lineari Matlab offre due funzioni:

```
function [X, FVAL, FLAG] = fzero(F, X0)
function [X, FVAL, FLAG] = fsolve(F, X0)
```

Per quanto riguarda i valori restituiti abbiamo che:

- **`X`** è l'ultimo valore di x visitato
  - Se tutto è andato bene, è la soluzione
- **`FVAL`** è il valore di **`F`** in corrispondenza di **`X`**
  - Se tutto è andato bene, sarà molto vicino a 0
- **`FLAG`** è un numero che indica come sono andate le cose
  - Se vale `1`, l'algoritmo ha trovato uno zero
  - Altrimenti, qualcosa è andato storto (consultate **`help`**)

Equazioni Non Lineari in Matlab

Per risolvere equazioni non lineari Matlab offre due funzioni:

```
function [X, FVAL, FLAG] = fzero(F, X0)
function [X, FVAL, FLAG] = fsolve(F, X0)
```

Le due funzioni usano una combinazione di metodi numerici

- `fzero` è basata (grossomodo) sul metodo della bisezione
  - Cerca di trovare un secondo punto `x1`...
  - ...Tale che `F(X0)` e `F(X1)` abbiamo segni opposti
  - Se ce la fa e se `F` è continua, allora converge sempre
- `fsolve` usa metodi completamente diversi (i.e. trust region)
  - Non è garantito che converga...
  - ...Ma può essere più veloce di `fzero`

Equazioni Non Lineari in Matlab

Per risolvere equazioni non lineari Matlab offre due funzioni:

```
function [X, FVAL, FLAG] = fzero(F, X0)
function [X, FVAL, FLAG] = fsolve(F, X0)
```

Il valore di **`x0`** è molto importante:

- Se è scelto male, può impedire la convergenza
  - Nel caso di **`fzero`**, perché non si riesce a trovare un **`x1`** adeguato
  - Nel caso di **`fsolve`**, per i limiti del metodo stesso
- Se ci sono più soluzioni, può determinare quale sia restituita
  - Il più delle volte, sarà la soluzione più vicina ad **`x0`**…
  - …Ma in generale non è garantito

Di solito, il valore di **`x0`** si sceglie per intuizione o per tentativi

Sistemi di Equazioni Non Lineari

Sistemi di Equazioni Non Lineari

Per risolvere un sistema di equazioni non lineari…

…Cerchiamo lo zero di una funzione vettoriale, ossia risolviamo:

$$F(x) = 0 \qquad \text{con } F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

- Dove n ed m sono il numero di variabili e di equazioni.

Per esempio:

$$\begin{aligned} x^3 &= e^y \\ \log x &= y + 1 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad F((x, y)) = (0, 0)$$

- Con:

$$F((x, y)) = \left(\, x^3 - e^y, \quad \log x - y - 1 \, \right)$$

Sistemi di Equazioni Non Lineari

Per i sistemi di equazioni non lineari…

…Possiamo usare solo `fsolve`

```
function [X, FVAL, FLAG] = fsolve(F, X0)
```

In questo caso:

- La funzione `F` dovrà avere ancora un singolo parametro:

```
function Z = F(X)
```

- Questa volta, però, `X` sarà un vettore anziché uno scalare
- E lo stesso vale per il valore di ritorno `Z`

`fsolve` cercherà un vettore `X` per cui `F(X)` restituisca un vettore nullo

Argine di un Fiume: Equazioni

Argine di un Fiume: Equazioni

Torniamo al nostro problema

- Innanzitutto portiamo tutti i membri a sx del segno =:

$$\begin{aligned} \alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 - y_0 &= 0 \\ \alpha_2 x_1^2 + \alpha_1 x_1 + \alpha_0 - y_1 &= 0 \\ 2\alpha_2 x_2 + \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 - y_{max} &= 0 \end{aligned}$$

Le espressioni definiscono i termini di una funzione vettoriale:

- La funzione dovrà avere come input un singolo vettore (e.g. "$\mathbf{x}$")
- Il vettore dovrà contenere tutte le variabili:

$$\mathbf{x} = (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, x_2)$$

- L'ordine può (come sempre) essere scelto liberamente

Argine di un Fiume: Implementazione

A questo punto possiamo codificare la funzione in Matlab:

```
function z = f(a2, a1, a0, x0, x1, y0, y1, x2, ymax)
    % La curva deve passare per (x0, y0)
    z(1) = a2*x0^2 + a1*x0 + a0 - y0;
    % La curva deve passare per (x1, y1)
    z(2) = a2*x1^2 + a1*x1 + a0 - y1;
    % La derivata si deve annullare in X(4)
    z(3) = 2*a2*x2 + a1;
    % in X(4) la curva deve valere ymax
    z(4) = a2*x2^2 + a1*x2 + a0 - ymax;
end
```

- La variabile restituita **`z`** è un vettore di 4 elementi

Argine di un Fiume: Implementazione

La nostra `f` è la funzione da azzerare

- Ma ha troppi argomenti!
- `fsolve` richiede una funzione con un singolo argomento

Risolviamo il problema con una funzione anonima:

```
x0 = 0;
x1 = 7;
y0 = 0;
y1 = 2;
ymax = 5;
% Espongo un solo parametro
fz = @(X) f(X(1),X(2),X(3),x0,x1,y0,y1,X(4),ymax);
```

- Il parametro da esporre è `X`, il vettore delle variabili

Implementazione

Per trovare uno zero a questo punto usiamo:

```
[psol, fval, flag] = fsolve(fz, x0)
```

- In questo caso **`x0`** specificherà un valore per ogni variabile
- Per esempio, potremmo avere: **`x0 = [-1, 1, 0, 3]`**

Scegliere il valore x_0 per i sistemi di equazioni può essere complicato

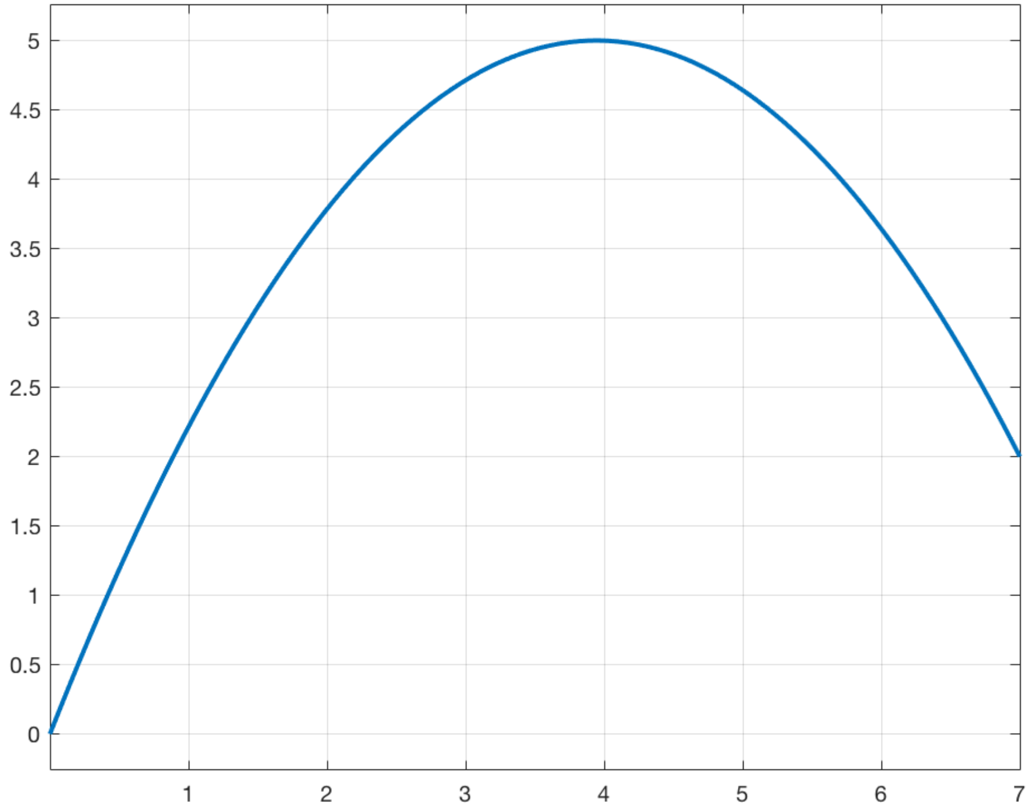
- Ci sono molti valori da decidere…
- …E disegnare la funzione può essere complicato (troppe dimensioni)

Come linea guida:

- Usate l'intuizione! Specie se il problema ha senso fisico
- Se qualcosa non torna, fate diversi tentativi

Soluzione

Per il nostro problema, l'argine avrà questa forma:

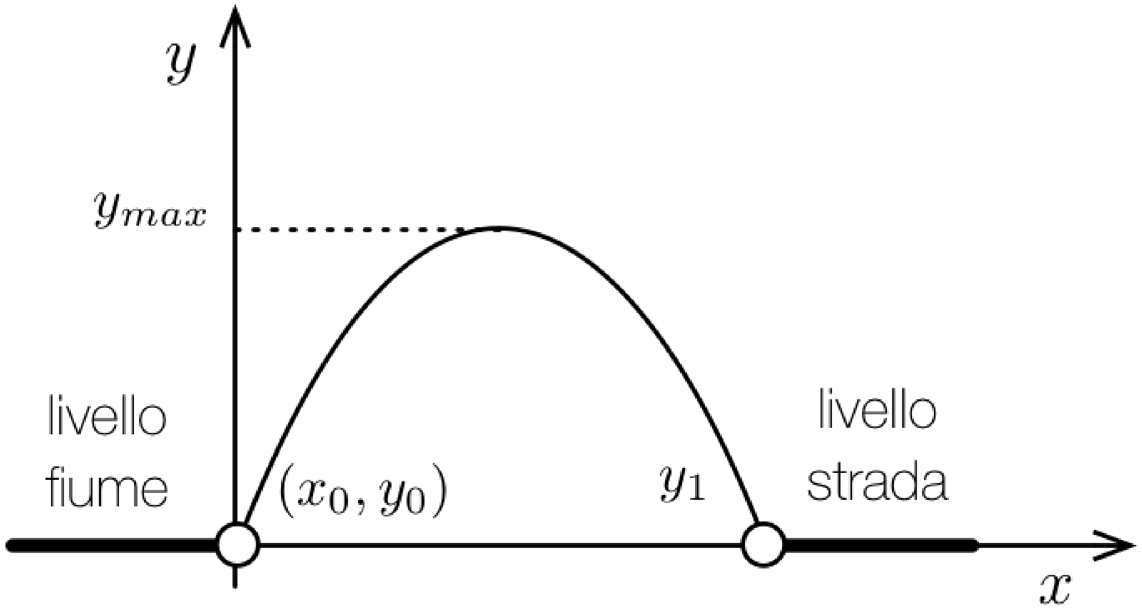


- Il massimo è raggiunto per $x_2 = 3.9446$

Esercizio: Argine di un Fiume (2)

Esercizio: Argine di un Fiume (2)

Consideriamo di nuovo l'esempio di costruzione di un argine



Come in precedenza:

- Alle ascisse abbiamo una posizione orizzontale x
- Alle ordinate abbiamo l'altezza y

Esercizio: Argine di un Fiume (2)

L'argine deve:

- Essere definito da una curva parabolica f
- Toccare il fiume in una posizione nota (x_0, y_0)
- Toccare la strada in un punto (x_1, y_1)...
- ...Di cui non è nota la coordinata x_1
- Raggiungere l'altezza massima y_{max}
- Avere una superficie complessiva pari a s

La superficie sarà data da:

$$S = \int_{\underbrace{x_0}_{=0}}^{x_1} f(x)\, dx$$

Esercizio: Argine di un Fiume (2)

Il file `es_riverbank2.m` contiene i dati del problema:

- Impostate il problema di definizione della curva…
- …Vedrete che otterrete un sistema non lineare
- Risolvetelo con gli strumenti messi a disposizione da Matlab…
- …Dopo aver introdotto una o più funzioni opportunamente definite
- Disegnate l’andamento della curva dell’argine

Suggerimento:

- Usate una funzione “normale” per definire le equazioni…
- …Ed una funzione anonima per esporre solo i parametri desiderati
- Non è obbligatorio farlo, ma verrà comodo in futuro

Esercizio: Equilibri (Modello di Shepherd)

Esercizio: Equilibri per Shepherd

Si consideri il modello di Shepherd:

$$x^{(k+1)} = \frac{rx^{(k)}}{1 + \left(\frac{x^{(k)}}{N}\right)^2}$$

È un modello tempo-discreto per l'evoluzione di una popolazione:

- $x^{(k)}$ è il numero di individui al passo k-mo
- r è un tasso di crescita
- N è il valore di popolazione per il cui r dimezza

Esercizio: Equilibri per Shepherd

Si consideri il modello di Shepherd:

$$x^{(k+1)} = \frac{rx^{(k)}}{1 + \left(\frac{x^{(k)}}{N}\right)^2}$$

Il file `es_shepherd.m` nello start-kit contiene un simulatore

- Vogliamo provare a determinare lo stato di equilibrio…
- …Risolvendo l'equazione non lineare:

$$x = \frac{rx}{1 + \left(\frac{x}{N}\right)^2}$$

- In pratica, richiediamo che lo stato non vari (i.e $x^{(k+1)} = x^{(k)}$)

Esercizio: Equilibri per Shepherd

Estendete il codice in `es_shepherd.m`

Costruite opportunamente la funzione da azzerare

- Disegnate l'andamento della funzione da azzerare
- ...Così da individuare visivamente la posizione degli zeri

Trovate lo zero con `fzero` o `fsolve`

- Verificate anche i valori restituiti di `fval` e `flag`

Provate a variare il valore di partenza x_0

- Cercate di ottenere due punti di equilibrio diversi

Esercizio: Equilibri (Crescita Logistica)

Esercizio: Equilibri per Crescita Logistica

Si consideri il modello di Crescita Logistica:

$$x^{(k+1)} = r x^{(k)} \left(1 - \frac{x^{(k)}}{N}\right)$$

Che può essere utilizzato per l'evoluzione di una popolazione

- $x^{(k)}$ è il numero individui al passo k-mo
- r è un tasso di crescita
- N è il massimo valore della popolazione sostenibile

Il file `es_logi_eq.m` nello start-kit contiene un simulatore

- Vogliamo provare a determinare lo stato di equilibrio…
- …Risolvendo una equazione non lineare

Esercizio: Equilibri per Crescita Logistica

Estendete il codice in `es_logi_eq.m`

Costruite opportunamente la funzione da azzerare

- Disegnate l'andamento della funzione da azzerare...
- ...Così da individuare visivamente la posizione degli zeri

Trovate lo zero con `fzero` o `fsolve`

- Verificate anche i valori restituiti di `fval` e `flag`

Provate a variare il valore di partenza x_0

- Osservate se viene trovato uno zero diverso

Esercizio: Crescita Logistica, Caso Preda-Predatore

Esercizio: Crescita Logistica, Preda-Predatore

Si consideri questo modello preda-predatore visto a lezione:

$$H^{(t+1)} = \overbrace{r\left(1 - \frac{H^{(t)}}{k}\right) H^{(t)}}^{\text{crescita logistica}} - \overbrace{s\, H^{(t)} P^{(t)}}^{\text{prede eliminate}}$$

$$P^{(t+1)} = \underbrace{u\, P^{(t)}}_{\text{calo in assenza di prede}} + v\underbrace{\left(s\, H^{(t)} P^{(t)}\right)}_{\text{prede eliminate}}$$

- H è il numero di prede e P quello di predatori
- k è la massima popolazione di prede sostenibile
- s è la frazione di $H^{(t)}$ che un predatore può "mangiare"
- $u < 1$ è il ritmo di scomparsa dei predatori in assenza di prede
- v è il "bonus riproduttivo" per ogni preda "mangiata"

Esercizio: Crescita Logistica, Preda-Predatore

Il file `es_logi_pp_eq.m` contiene un simulatore:

- Si estenda il codice così da determinare un punto di equilibrio…
- …Risolvendo un sistema di equazioni non lineari

Il punto di partenza x_0 sarà in questo caso un vettore:

- Conterrà il numero iniziale di prede e predatori
- Per tentativi, trovate un x_0 tale che la soluzione trovata…
- …coincida con lo stato stabile raggiunto dalla simulazione

Esercizio: Fluido Comprimibile in Condizioni Isoentropiche

Esercizio: Gas Isoentropico

In un fluido comprimibile isoentropico all'equilibrio…

…Pressione e temperature si distribuiscono secondo le equazioni:

$$p = p_0 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{M}{RT_0} g(z_0 - z) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$T = T_0 \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{M}{RT_0} g(z_0 - z) \right]$$

- P, T sono la pressione e temperatura a quota z
- P_0, T_0 sono la pressione e temperatura a quota z_0
- R è la costante dei gas perfetti
- M è la massa del gas
- γ è un parametro che caratterizza il gas

Esercizio: Gas Isoentropico

Se sono noti $P_0, T_0, \gamma, M, z_0 - z$, determinare P e T è facile:

- Perché le due equazioni sono esplicite in P e T
- Vale a dire: P e T compaiono da sole a sx dell'uguale

Supponiamo invece di disporre di P, T, P_0, T_0 e $z_0 - z$

- A partire dai dati noti (e.g. misurati con qualche strumento)…
- …Vogliamo determinare le caratteristiche del gas (i.e γ e M)
- Le due equazioni date sono implicite in γ e M…
- …Perché γ e M non possono essere isolate a sx del segno "="

Quindi dobbiamo risolvere un sistema di due equazioni non lineari

Esercizio: Gas Isoentropico

Il file `es_isentropic.m` contiene i dati del problema

Definite una funzione:

```
function z = f(p, T, p0, T0, gm, M, z0z, R, g)
```

- Che corrisponda al sistema di equazioni da risolvere…
- …Ma esponga tutti i parametri

Definite quindi una funzione anonima che esponga solo γ e M

- Usatela per determinare γ e M
- **NOTA:** Usando due funzioni (normale + anonima)
- …È molto veloce definire quali siano le variabili ed i parametri
- Le variabili sono quelle "esposte" nella funzione anonima!

Esercizio: Equazione di Dodge-Metzner

Esercizio: Dodge-Metzner

Consideriamo un fluido di potenza (dilatante o pseudoplastico)

- Se il fluido è in moto turbolento, il fattore di attrito f in una condotta
- …è definito dalla seguente relazione (Dodge-Metzner):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4}{n^{0.75}} \log\left(Re_{pl} f^{1-n/2}\right) - \frac{0.4}{n^{1.2}}$$

- Dove n è un parametro che caratterizza il fluido
- Re_{pl} è un numero di Reynolds modificato

Vogliamo utilizzare la relazione per calcolare il valore di f

Si supponga che i valori di Re_{pl} e n siano noti

Esercizio: Dodge-Metzner

Il file `es_dodge_metzner.m` contiene i dati del problema

- Definite nel file una funzione ausiliaria:

```
function z = dodge_metzner(f, n, Re_pl)
```

- Dovremo rendere la funzione utilizzabile in `fzero` o `fsolve`…
- …usando una funzione anonima per esporre solo alcuni parametri
- Si disegni l'andamento della funzione da azzerare
- Si determini il valore di f con `fzero` o `fsolve`

In un secondo momento:

- Si assuma che f valga 0.0020…
- …E si determini il valore corrispondente di n

Esercizio: Equazione di Buckingham-Reiner

Esercizio: Buckingham-Reiner

Consideriamo un fluido di Bingham

- Se il fluido è in moto laminare, il fattore di attrito f in una condotta
- …è definito dalla seguente relazione (Buckingham-Reiner):

$$f = \frac{64}{Re}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{He}{Re} - \frac{64}{3}\frac{He^4}{f^3 Re^7}\right)$$

- Dove He è il numero di Hedstrom
- E Re è il numero di Reynolds

Vogliamo utilizzare la relazione per calcolare il valore di f

Si supponga che i valori di Re e He siano noti

Esercizio: Buckingham-Reiner

Il file `es_buckingham_reiner.m` contiene i dati del problema

- Definite nel file una funzione ausiliaria:

```
function z = buckingham_reiner(f, Re, He)
```

- Dovremo rendere la funzione utilizzabile in `fzero` o `fsolve`...
- ...usando una funzione anonima per esporre solo alcuni parametri
- Si disegni l'andamento della funzione da azzerare
- Si determini il valore di f con `fzero` o `fsolve`

Attenzione: Per $f = 0$ l'equazione perde senso fisico!

- Scegliete il range per il disegno di conseguenza
- Conviene usare più dei 100 punti che `linspace` usa di default