Laboratorio di Informatica T

Equilibrio di Sistemi Dinamici Lineari

Equilibrio di Sistemi Dinamici Tempo-Discreti

Consideriamo un sistema dinamico tempo-discreto

In generale è definito da una equazione del tipo:

$$x^{(t+1)} = f(x^{(t)})$$

Per questo tipo di sistemi, abbiamo imparato a:

- Osservare l'andamento dello stato del tempo
- Identificare il tipo di comportamento (convergente, periodico...)
- Per i sistemi convergenti, individuare uno stato di equilibrio...
- ...Simulando sufficientemente a lungo e misurando lo stato finale

Gli stati di equilibrio, però, si possono determinare a priori!

Determinazione degli Stati di Equilibrio

Uno stato è di equilibrio se viene "trasformato in se stesso"

Formalmente, uno stato di equilibrio x deve soddisfare:

$$x = f(x)$$

- Mancano gli apici, perché lo stato a sx e dx è lo stesso

Se risolviamo l'equazione, determiniamo gli stati di equilibrio

- In generale x è un vettore, quindi $x = f(x)$ è un sistema di equazioni
- Se $f(x)$ è lineare, potremo usare la forma matriciale:

$$Ax = b$$

E possiamo risolverlo con i metodi visti in analisi numerica

Un Esempio: Pagerank

Per l'algoritmo pagerank, visto la scorsa lezione

L'equazione fondamentale è data da:

$$x^{(t+1)} = p \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{vettore}} + (1 - p)Px^{(t)}$$

Uguagliando $x^{(t+1)}$ e $x^{(t)}$ otteniamo:

$$\underbrace{(I - (1 - p)P)}_{A}x = p\underbrace{\frac{1}{n}}_{b}$$

- A è quadrata per costruzione (deriva da una transizione di stato)
- Quindi, in casi normali, la soluzione è data da $x = A^{-1}b$

Un Esempio: Pagerank

Supponendo di disporre delle variabili:

- `p`, per la probabilità di stancarsi
- `P`, per la matrice delle probabilità di click
- `n`, per il numero delle pagine

Possiamo prima costruire la matrice A e la colonna b:

```
A = (eye(n) - (1-p)*P) % eye e' la matrice identita'
b = (ones(n,1) * p/n) % ones(n,1) per avere una colonna
```

E quindi possiamo calcolare la soluzione con una divisione sinistra:

```
xeq = A \ b
```

Proprietà di A e Stati di Equilibrio

Può capitare che A sia singolare

Per esempio, per le previsioni del tempo avevamo:

$$x^{(t+1)} = Px^{(t)} \qquad \text{con} \qquad P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Da cui si ottiene il sistema:

$$(I - P)x = 0$$

- Possiamo usare la funzione `det` per calcolare il determinante:

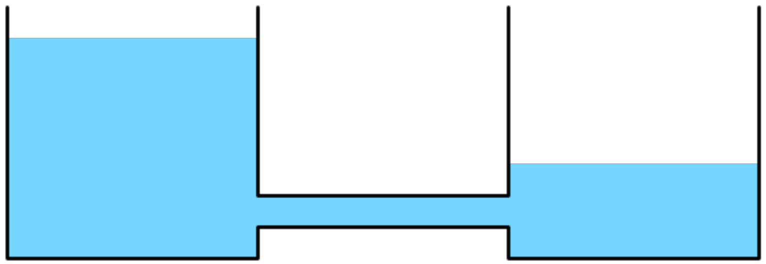
```
det(eye(2) - A) % denota -1.1102e-17
```

- Il vero determinante è 0! Il risultato è dovuto ad errori numerici
- Ai fini pratici, se il determinante è così basso è come se fosse 0

Proprietà di $\mathbf{A}$ e Stati di Equilibrio

Se $\mathbf{A}$ è singolare, ci sono infiniti stati di equilibrio

Per esempio, supponiamo di avere due vasi comunicanti



- Il livello finale dipende da quanta acqua c'è nel sistema!

Formalmente: lo stato raggiunto dipende dallo stato iniziale

- Negli esercizi, sarete avvisati se questo caso si presenta...
- ...E vi sarà suggerito come aggirare la difficoltà

Qualche Commento

L'approccio è valido anche per sistemi dinamici non lineari

Uno stato, per essere di equilibrio, deve soddisfare:

$$x = f(x)$$

- I.e. x deve soddisfare un sistema di equazioni non lineari
- Ce ne occuperemo più avanti nel corso

Quando risolvere un sistema di equazioni invece di simulare?

Qualche linea guida:

- Se non ci interessa la stabilità (basta uno stato di equilibrio)
- Se non ci interessa il comportamento nel tempo
- Se dobbiamo calcolare lo stato di equilibrio con alta precisione

Laboratorio di Informatica T

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Una stanza è ventilata mediante una sola apertura:

- Sia T_o temperatura esterna, T_a quella dell'aria interna
- Sia T_w la temperatura dei muri

Il flusso di calore tra l'esterno e l'aria è dato da:

$$i_1 = \frac{1}{R_1}(T_o - T_a)$$

- Dove R_1 è la resistenza termica dell'apertura

Il flusso di calore tra l'aria e i muri è dato da:

$$i_2 = \frac{1}{R_2}(T_a - T_w)$$

- Dove R_1 è la resistenza termica tra l'aria ed i muri

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Per quanto riguarda le temperature:

- La temperatura dell'esterno si suppone costante
- La temperature dei muri si suppone costante
- La temperatura dell'aria $variaconiflussidicalore$

In particolare vale la relazione:

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{C_a}(i_1 - i_2)$$

- Il flusso di calore i_1 va dall'esterno all'aria
- Il flusso di calore i_2 va dall'aria ai muri
- C_a è la capacità termica dell'aria

Nota: si tratta di una equazione differenziale!

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Vogliamo determinare la temperatura di equilibrio della stanza

Nel complesso, valgono le relazioni:

$$i_1 = \frac{1}{R_1}(T_o - T_a) \qquad i_2 = \frac{1}{R_2}(T_a - T_w) \qquad \frac{dT_a}{dt} = \frac{1}{C_a}(i_1 - i_2)$$

- Non sappiamo risolvere le equazioni differenziali...
- ...Ma all'equilibrio lo stato non varia $\Rightarrow$ le derivate si annullano

$$i_1 = \frac{1}{R_1}(T_o - T_a) \qquad i_2 = \frac{1}{R_2}(T_a - T_w) \qquad 0 = \frac{1}{C_a}(i_1 - i_2)$$

- È un sistema di equazioni lineari!
- Le variabili sono i_1, i_2, T_a (gli altri termini li conosciamo)

Esercizio: Temperatura di una Stanza

Possiamo portare il sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \frac{1}{R_1} \\ & 1 & -\frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{C_a} & -\frac{1}{C_a} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ T_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} T_o \\ -\frac{1}{R_2} T_w \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Ogni riga è la trascrizione di una equazione
- Ogni colonna della matrice è associata ad una variabile…
- …Perché viene moltiplicata per tale variabile

Se chiamiamo la matrice $\boldsymbol{A}$ ed il termine noto $\boldsymbol{b}$, abbiamo:

$$Ax = b$$

- Possiamo risolverlo con una divisione sinistra!

Esercizio: Temperatura di una Stanza

- Il sistema di equazioni è in questo caso molto semplice...
- ...E si può anche semplificare considerevolmente
- Il nostro scopo però è risolverlo per via numerica

Partite dal file `es_temperature.m` nello start-kit

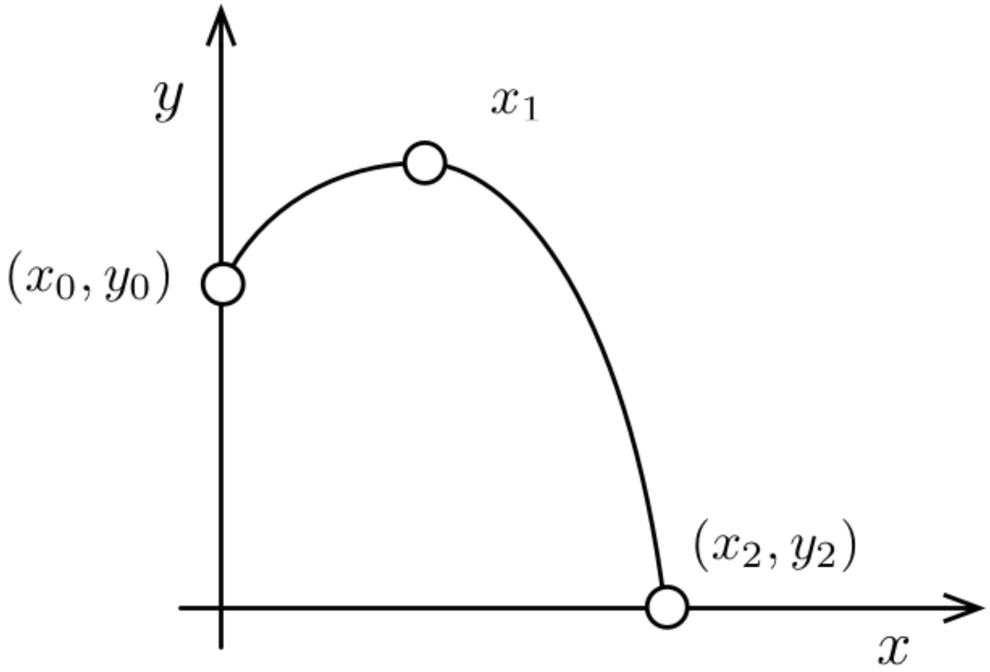
- Impostate la matrice dei coefficienti
- Impostate la colonna dei termini noti
- Risolvete il sistema per $T_o = 17, T_w = 21$ e per $T_o = 28, T_w = 21$
- Stampate il valore di T_a all'equilibrio

Laboratorio di Informatica T

Tracciamento di Curve

Tracciamento di Curve

Si vuole progettare una arcata a ridosso di una parete verticale



La curva che descrive l'arcata:

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_0, y_0) sulla parete
- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_2, y_2) a terra

- Deve raggiungere l'altezza massima per $x = x_1$ (con x_1 noto)

Tracciamento di Curve

Un approccio: trattiamo la curva come una funzione $\mathbf{f(x)}$

In questo modo possiamo tradurre le condizioni in equazioni:

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_0, y_0) sulla parete

$$f(x_0) = y_0$$

- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_2, y_2) a terra

$$f(x_2) = y_2$$

- Deve raggiungere l'altezza massima per $x = x_1$ (con x_1 noto)

$$f'(x_1) = y_1$$

Così come sono ci dicono ben poco...

Tracciamento di Curve

Ci serve una assunzione sulla classe della funzione $\mathbf{f(x)}$

Per esempio: $f(x)$ è polinomiale. Formalmente:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$$

Le nostre condizioni allora diventano:

passaggio per (x_0, y_0)	$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_0^i = y_0$
passaggio per (x_1, y_1)	$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_2^i = y_2$
annullamento di $f'(x_1)$	$\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i x_1^{i-1} = 0$

Tracciamento di Curve

Ci siamo quasi! Guardiamole meglio:

$$\text{passaggio per } (x_0, y_0) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_0^i = y_0$$

$$\text{passaggio per } (x_1, y_1) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_2^i = y_2$$

$$\text{annullamento di } f'(x_1) \qquad \sum_{i=1}^{n} i\alpha_i x_1^{i-1} = 0$$

Quali sono le incognite?

- Sono i parametri della funzione α_i e non le x!

Che grado di polinomio ci serve?

- Tre condizioni $\Rightarrow$ tre variabili, i.e. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ $\Rightarrow$ secondo grado

Tracciamento di Curve

In questo modo otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 &= y_0 \\ \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 &= y_2 \\ 2\alpha_2 x_1 + \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

- Che è lineare nelle incognite $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$

La tecnica vista è un metodo generale per progettare curve:

- Si ipotizza una struttura per la curva da costruire (e.g. polinomio)
- Si traducono i vincoli del problema in equazioni
- Si risolvono le equazioni per determinare i parametri

Tracciamento di Curve: Esercizio

In questo modo otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned} \alpha_2 x_0^2 + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 &= y_0 \\ \alpha_2 x_2^2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 &= y_2 \\ 2\alpha_2 x_1 + \alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

- Che è lineare nelle incognite $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$

A partire dal file `es_arc.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti della curva risolvendo il sistema
- Si disegni la forma dell'arcata
- Si stampi a video il valore dell'altezza massima

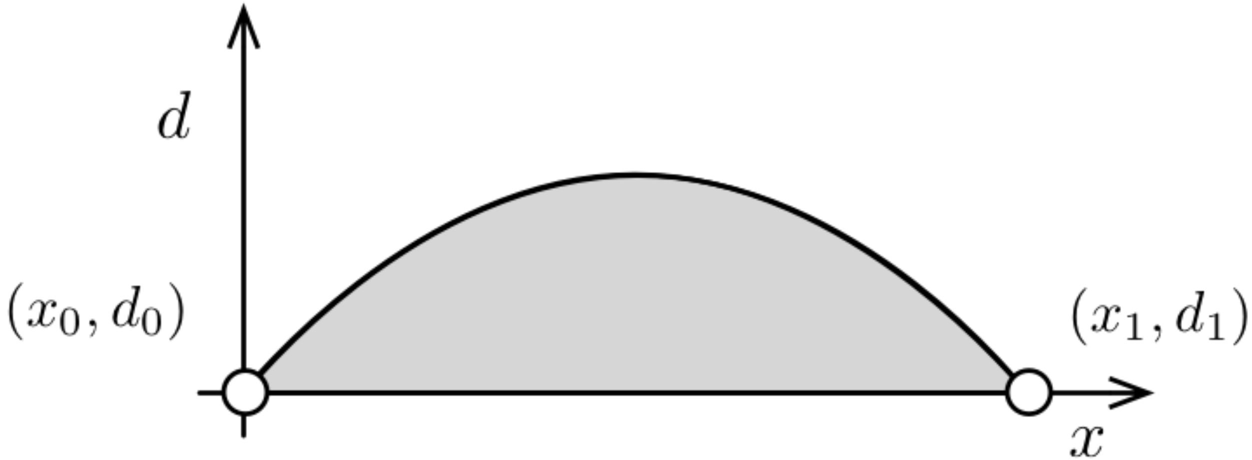
Laboratorio di Informatica T

Esercizio: Letto di un Fiume

Esercizio: Letto di un Fiume

Si vuole progettare lo scavo per il letto di un fiume

La sezione dello scavo deve presentarsi come segue:



- La coordinata x rappresenta una posizione orizzontale
- La coordinata d rappresenta la profondità dello scavo
  - Per questa ragione la sezione si presenta "al contrario"

Esercizio: Letto di un Fiume

Si vuole progettare lo scavo per il letto di un fiume

- La sezione deve essere descritta da una curva parabolica
- Deve passare per i punti noti (x_0, y_0) e (x_1, y_1)
- L'area della sezione determina la portata massima...
- ...E deve essere pari ad un valore prestabilito s_1

Se $f(x)$ è la funzione che descrive la curva, l'area della sezione è:

$$S = \int_{\underbrace{x_0}_{=0}}^{x_1} f(x)\, dx$$

A partire dal file `es_riverbed.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni la forma della sezione

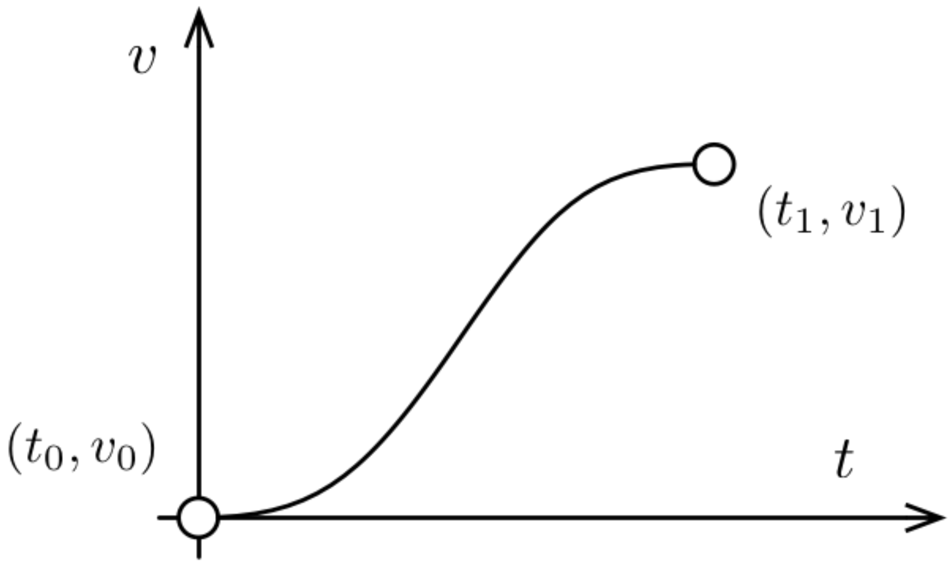
Laboratorio di Informatica T

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Si vuole controllare l'accelerazione di un carrello automatico

Il profilo di velocità in accelerazione deve presentarsi come segue:



- La coordinata t rappresenta il tempo
- La coordinata v rappresenta la velocità

Possiamo usare la curva per programmare una centralina di controllo

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Si vuole controllare l'arresto di un carrello automatico

- Il profilo deve seguire un andamento polinomiale
  - Il grado del polinomio è da determinare
  - Servirà un coefficiente per ogni condizione specificata
- La velocità iniziale e finale ed il tempo di accelerazione t_1 sono noti
- Perché le variazioni non siano troppo brusca…
- …Si richiede che la derivata della velocità in t_0 e t_1 sia nulla

A partire dal file `es_acceleration.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni il profilo della velocità in accelerazione

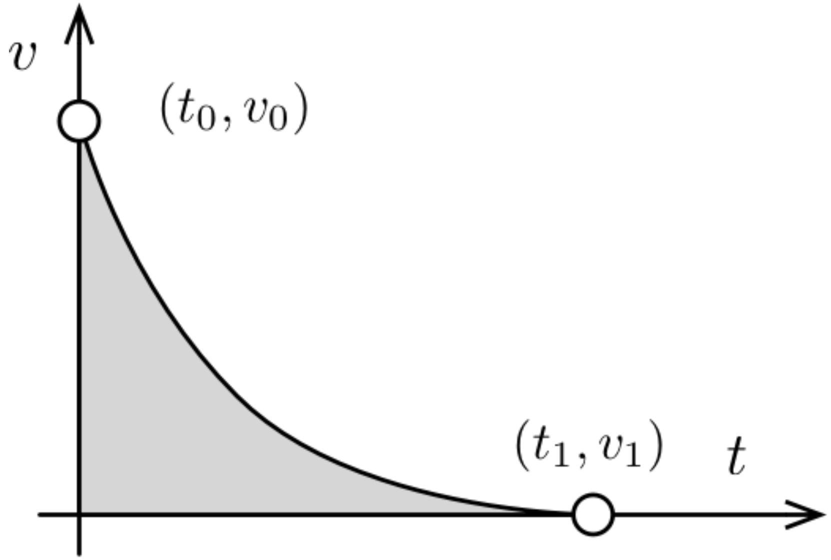
Laboratorio di Informatica T

Esercizio: Controllo di Frenata

Esercizio: Controllo di Frenata

Si vuole controllare l'arresto di un carrello automatico

Il profilo di velocità in frenata deve presentarsi come segue:



- La coordinata t rappresenta il tempo
- La coordinata v rappresenta la velocità

Possiamo usare la curva per programmare una centralina di controllo

Esercizio: Controllo di Frenata

Si vuole controllare l'arresto di un carrello automatico

- Il profilo è dato da un polinomio, di grado da determinare
- La velocità iniziale e finale ed il tempo di frenata t_1 sono noti
- Si richiede che la derivata della velocità in t_1 sia nulla
- Lo spazio di frenata S deve essere pari ad un valore s_1, dove:

$$S = \int_{\underbrace{t_0}_{=0}}^{t_1} f(t)\, dt$$

A partire dal file `es_brake.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni il profilo della velocità in frenata

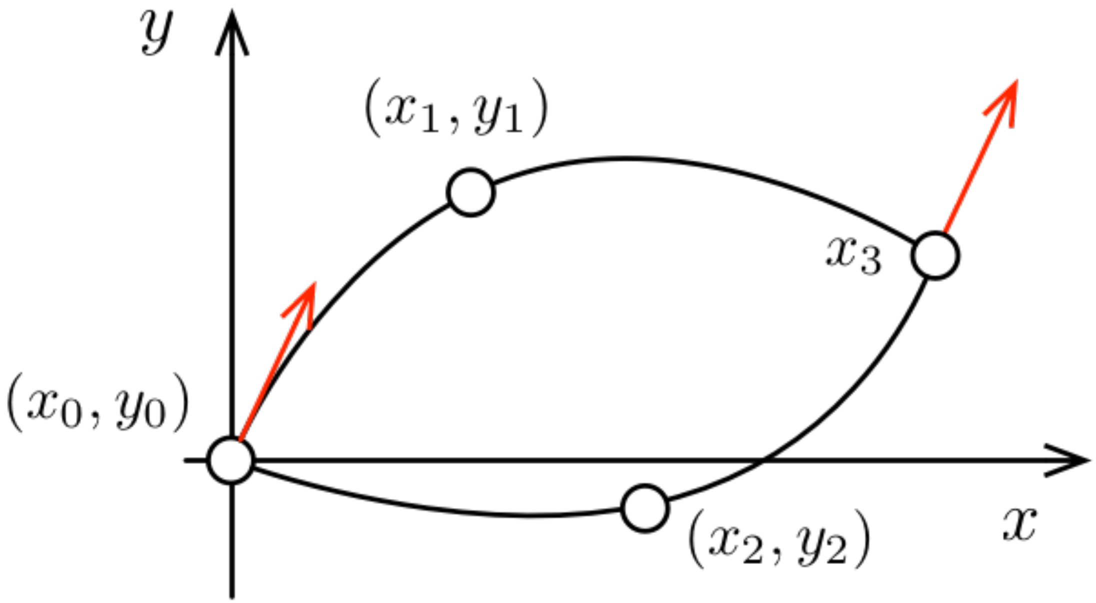
Laboratorio di Informatica T

Esercizio: Progettazione di un Telaio

Esercizio: Progettazione di un Telaio

Si vuole progettare un telaio per una bicicletta

La forma del telaio deve apparire come segue:



Esercizio: Progettazione di un Telaio

Si vuole progettare un telaio per una bicicletta

- La forma del telaio è descritta da due curve paraboliche f_1 ed f_2
- Le due curve originano in un punto comune $(x_0 y_0)$
- La curva f_1 deve passare per l'ancoraggio della sella in (x_1, y_1)
- La curva f_2 deve passare per l'ancoraggio dei pedali in (x_2, y_2)
- Le due curve devono congiungersi in un punto (x_3, y_3)…
- …Di cui è nota solo la coordinata x_3
- Le derivate di f_1 in x_0 ed f_2 in x_3 devono essere uguali

Esercizio: Progettazione di un Telaio

A partire dal file `es_frame.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti delle due curve
- Si disegni il profilo del telaio

Attenzione:

Ci sono due condizioni che coinvolgono entrambe le curve:

- Le due curve devono congiungersi in un punto $(x_3, ???)$
- Le derivate di f_1 in x_0 ed f_2 in x_3 devono essere uguali

Non possono essere formulate separatamente!

- Occorrerà definire un'unico sistema di equazioni...
- ...in cui compaiono sia $f_1(x)$ che $f_2(x)$