

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche

Metodi di Quadratura in Matlab

Metodi di Quadratura in Matlab

Matlab offre due funzioni principali per effettuare integrazione:

```
function Q = integral(F,XMIN,XMAX)
function Q = trapz(X,Y)
```

Funzionano in modo radicalmente diverso:

- **integral** richiede una funzione **F** che abbia un singolo parametro:

```
function Y = F(X)
```

- L'intervallo di integrazione **XMIN..XMAX** viene diviso in sotto-intervalli
- Per ogni sotto-intervallo, **F** viene invocata per ottenere campioni
- L'integrale sui sotto-intervalli viene approssimato in base ai campioni
- Eventualmente, si ripete la suddivisione per aumentare la precisione

Metodi di Quadratura in Matlab

Matlab offre due funzioni principali per effettuare integrazioni:

```
function Q = integral(F,XMIN,XMAX)
function Q = trapz(X,Y)
```

Funzionano in modo **radicalmente diverso**:

- **trapz** utilizza il **metodo dei trapezi**
- Si assume che la funzione da integrare sia stata già campionata
- I vettori **x** e **y** contengono le coordinate **x** e **y** dei campioni
- Viene calcolata l'area dell'**interpolazione lineare a tratti**

La funzione **trapz** è particolarmente utile per **dati sperimentali**

- Non c'è una vera funzione da integrare, ma solo delle misurazioni!

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esempio: Lunghezza
di Curve Parametriche

Esempio: Lunghezza di Curve Parametriche

Supponiamo di voler calcolare la lunghezza di una pista ellittica

Per farlo, ci serve una **descrizione formale** della traiettoria

- Di solito, un traiettoria si descrive mediante una **curva parametrica**...
- ...Cioè una funzione con input scalare ed output vettoriale:

$$F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$$

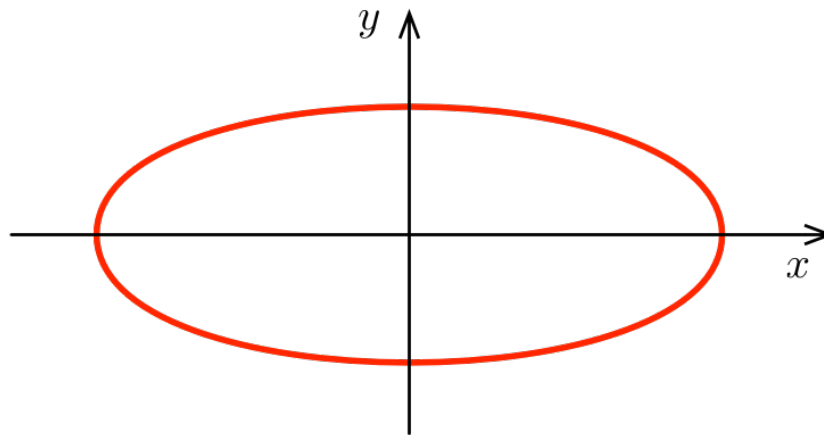
In particolare, una ellissi è descritta da:

$$F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$$

- a e b sono le lunghezze dei due semi-assi
- L'unica variabile che compare è in questo caso t

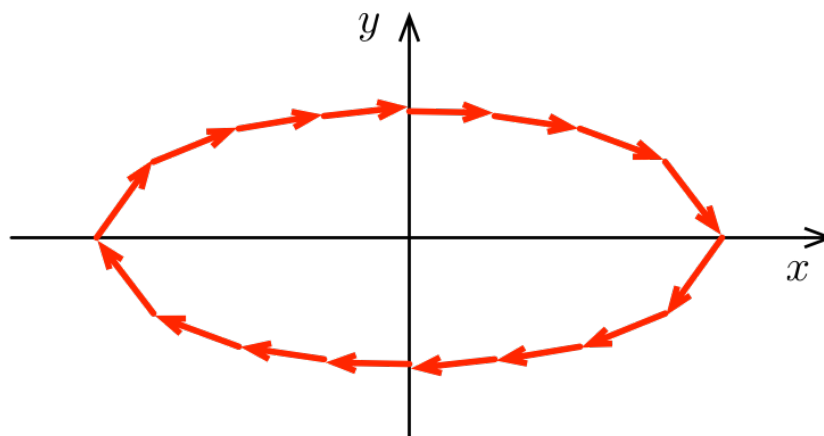
Esempio: Lunghezza di Curve Parametriche

Il risultato può essere qualcosa di questo genere:



Esempio: Lunghezza di Curve Parametriche

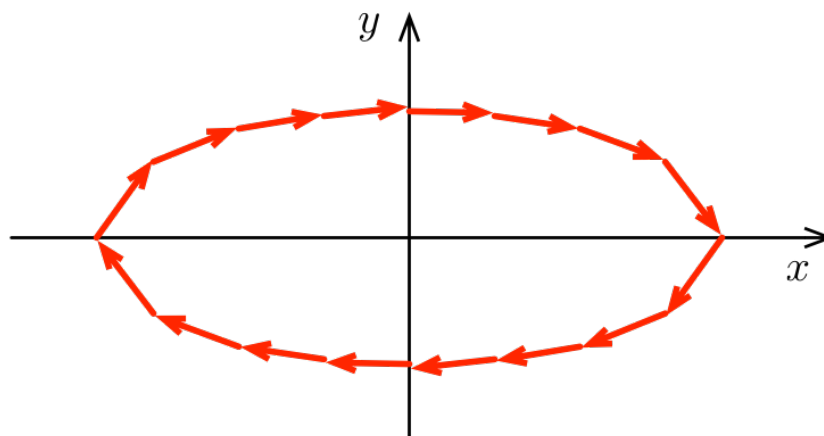
Il risultato può essere qualcosa di questo genere:



- Per calcolare la **lunghezza di una curva parametrica**...
- ...Possiamo immaginare di dividerla in **segmenti infinitesimi**

Esempio: Lunghezza di Curve Parametriche

Il risultato può essere qualcosa di questo genere:

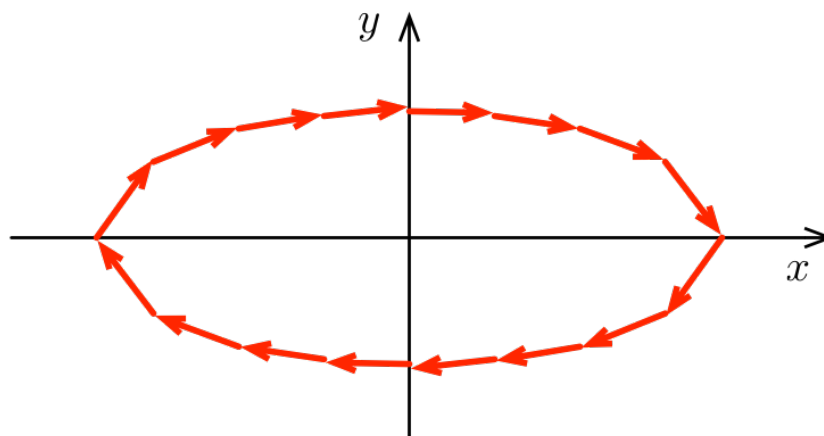


- Ogni segmento infinitesimo corrisponde ad un vettore tangente
- L'equazione si ottiene derivando ogni componente di $F(t)$

$$F'(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

Esempio: Lunghezza di Curve Parametriche

Il risultato può essere qualcosa di questo genere:

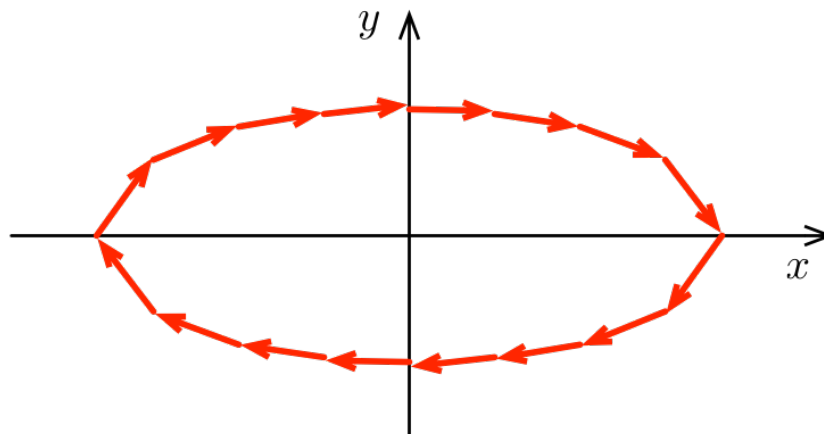


La **lunghezza di un vettore tangente** è quindi data da:

$$\|F'(t)\| = \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}$$

Esempio: Lunghezza di Curve Parametriche

Il risultato può essere qualcosa di questo genere:



La **lunghezza della curva** si ottiene integrando quella del vett. tangente:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|F'(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt$$

Esempio: Lunghezza di Curve Parametriche

Quindi, nel caso della nostra ellissi, abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(a \sin t)^2 + (b \cos t)^2} dt$$

Per calcolare l'integrale, innanzitutto definiamo la funzione da integrare

- Se l'espressione è semplice, possiamo usare una funzione anonima:

```
dl = @(t) sqrt((a.*sin(t)).^2 + (b.*cos(t)).^2)
```

- Altrimenti, definiamo una nuova funzione con **function**
- In entrambi i casi, usiamo gli operatori elemento per elemento...
- ...Perché **integral** e **trapz** funzionano manipolando vettori

Esempio: Lunghezza di Curve Parametriche

Il prossimo passo dipende dal metodo di integrazione scelto

Se vogliamo usare `integral`, possiamo scrivere:

```
L = integral(dl, 0, 2*pi)
```

- La funzione Matlab si occupa del campionamento

Se vogliamo usare `trapz`, possiamo scrivere:

```
X = linspace(0, 2*pi) % Valori di t  
Y = dl(X) % Lunghezze del vettore tangente  
Q = trapz(X, Y)
```

- Il campionamento va fatto prima di invocare la funzione

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Stima di Parametri

Stima di Parametri

Consideriamo un problema di progetto

- Assumiamo che il semi-asse b sia fissato
- Il semi-asse a va invece deciso in modo che...
- ...La pista abbia la stessa lunghezza di quella di Indianapolis



Stima di Parametri

Sappiamo che la lunghezza della pista è data da:

$$L(a) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a \sin t)^2 + (b \cos t)^2} dt$$

- Solo a è variabile $\Rightarrow$ la lunghezza è una funzione di a , i.e. $L(a)$

Se L^* è la lunghezza desiderata, deve valere:

$$L(a) = L^*$$

Si tratta di una equazione non lineare in a !

- La cosa strana è che $L(a)$ è calcolata via integrazione numerica
- ...Ma se risolviamo l'eq. con metodi numerici, questo non importa
- ...Perché ci basta poter calcolare la funzione da azzerare

Stima di Parametri

Dobbiamo risolvere:

$$L(a) - L^* = 0$$

Quindi potremmo scrivere:

```
b = ...; % Valore di b
Lt = ...; % Lunghezza di Indianapolis
fz = @(a) curve_length(a, b) - Lt;
[asol, fval, flag] = fzero(fz, a0) % a0: stima iniziale

function L = curve_length(a, b)
    dl = @(t) sqrt((a.*sin(t)).^2 + (b.*cos(t)).^2);
    L = integral(dl, 0, 2*pi);
end
```


Stima di Parametri

Molti problemi di progettazione si possono affrontare così

- Supponiamo che il parametro da determinare si chiami x
- E di avere un vincolo su una grandezza y che dipende da x

A questo punto:

- Prima si trova il modo di calcolare y assumendo che x sia noto
- Poi si incapsula il metodo di calcolo in una funzione $F(x)$
- Quindi si risolve una equazione del tipo:

$$F(x) = y^*$$

- Dove y^* è il valore desiderato per y

Vedremo diversi esempi di qui alla fine del corso!

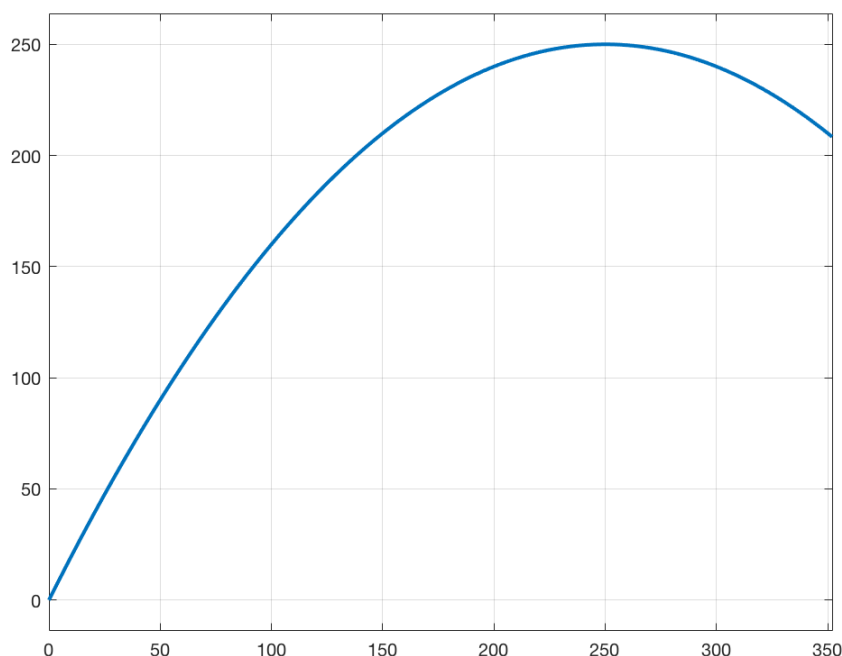
Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Punto Intermedio

Esercizio: Punto Intermedio

Si vuole piazzare un misuratore di velocità su un tratto di pista

Il tratto è definito da una parabola con estremi e coefficienti noti



Esercizio: Punto Intermedio

La parabola può essere vista come una curva parametrica

$$F(x) = \begin{pmatrix} x \\ ax^2 + bx + c \end{pmatrix}$$

- Il parametro in questo caso è x , che coincide con la prima coordinata
- Tutti i dati sono disponibili nel file `es_halfway.m`

Q1: si definisca una funzione:

```
function L = poly_length(p, x0, x1)
```

- Che, dati un polinomio $\mathbf{p}$ e due estremi per la coordinata $x...$
- ...Calcoli lunghezza della curva polinomiale tra $\mathbf{x0}$ e $\mathbf{x1}$

Si utilizzi la funzione per calcolare la lunghezza del tratto di pista

Esercizio: Punto Intermedio

Q2: Il misuratore deve essere collocato a metà del tratto

- Si determinino le coordinate di un punto (x', y') ...
- ...Che sia **equidistante dai due estremi del tratto di pista**

NOTA: Il secondo quesito è un problema di stima di parametri!

- Richiede di risolvere una equazione non lineare...
- ...In cui la funzione da azzerare è calcolata via integrazione numerica

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Bacino Idrico

Esercizio: Bacino Idrico

Un piccolo bacino idrico è riempito artificialmente



Esercizio: Bacino Idrico

Un piccolo bacino idrico è riempito artificialmente

La portata d'acqua in ingresso (in m^3/h) è data da:

$$q(t) = a + b \sin\left(2\pi \frac{t}{24}\right) + c \sin\left(2\pi \frac{t}{13}\right)$$

- I coefficienti a, b, c sono noti

I dati del problema sono nel file `es_flow.m`

- La formula per la portata è già definita nella funzione:

```
function Q = flow_rate(t, a, b, c)
```


Esercizio: Bacino Idrico

Q1: Si definisca una funzione:

```
function W = intake(t0, t1, a, b, c)
```

- Che calcoli la quantità totale d'acqua che entra nel bacino...
- ...Tra due estremi di tempo **t0** e **t1** (misurati in **h**)

Si determini quanta acqua entra nel bacino in **72** ore

Q2: Quanto tempo ci vuole perché entrino **200 m³** d'acqua?

NOTA: il secondo quesito è un problema di stima di parametri

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esecizio: Planata

Esecizio: Planata

Un aeroplanino di carta viene lanciato in orizzontale



Esecizio: Planata

Un aeroplanino di carta viene lanciato in orizzontale

La traiettoria nel tempo è descritta da una curva parametrica:

$$F(t) = \begin{pmatrix} v_x t \\ y_0 - \frac{1}{2} c g t^2 \end{pmatrix}$$

- v_x è la velocità con cui viene lanciato
- y_0 è la quota iniziale (in *m*)
- g è l'accelerazione di gravità
- c è un coefficiente noto che tiene conto della resistenza dell'aria

I dati del problema sono disponibili nel file `es_glide.m`

Esecizio: Planata

Q1: Si definisca la funzione:

```
function L = glide_length(vx, g, c, t0, tf)
```

- Che calcoli la strada percorsa dall'aeroplanino...
- ...Tra due istanti di tempo t_0 e t_f

Si determini la strada percorsa tra i due istanti specificati nel file

NOTA: strada percorsa = lunghezza della traiettoria percorsa

Q2: Si determini con che velocità v_x^* deve avvenire il lancio...

- ...Perché la strada percorsa sia pari a **15m**

Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Bacino Idrico (2)

Esercizio: Bacino Idrico (2)

Un bacino idrico artificiale è alimentato naturalmente



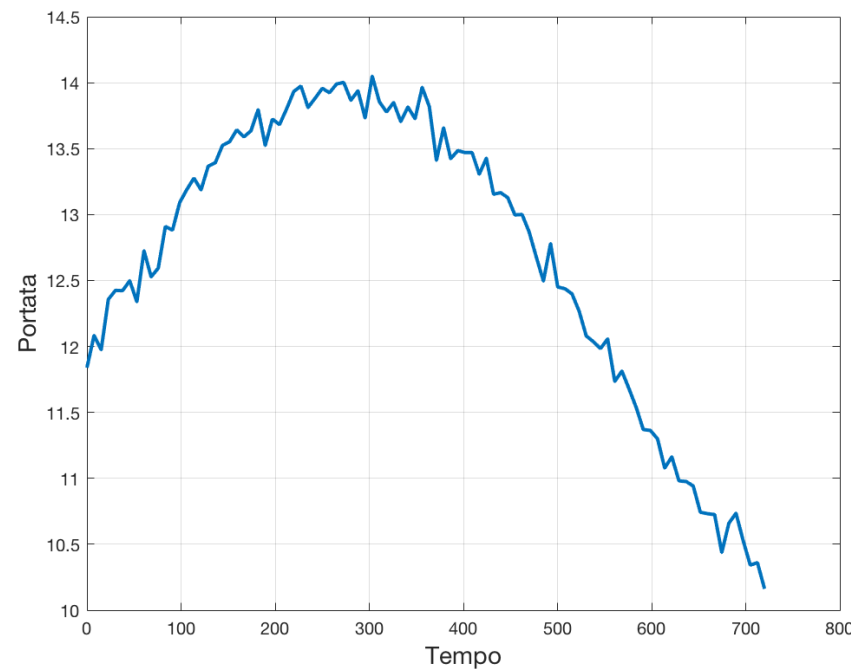
La portata in ingresso (in m^3/h) è misurata ad intervalli regolari

- Un certo numero di misurazioni sono nel file **flow.xlsx**
- Il codice di lettura è disponibile nel file **es_flow2.m**

Esercizio: Bacino Idrico (2)

Q1: Si stimi la quantità d'acqua entrata nel periodo considerato

- Si effettui una integrazione a partire dai dati sperimentali



- Si utilizzi il metodo dei trapezi (funzione `trapz`)

Esercizio: Bacino Idrico (2)

Si assuma che parte della portata in ingresso si possa dirottare

In particolare, dirottiamo tutta la portata sopra un certo limite

- In un istante di tempo t , la portata così limitata è data da:

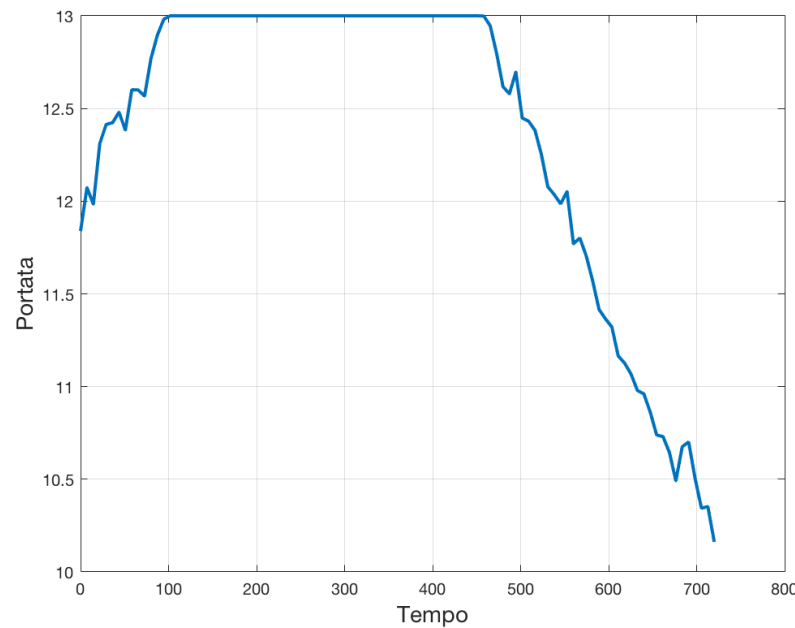
$$\min(L, PWL(t))$$

- $PWL(t)$ è l'approssimazione lineare a tratti della portata
 - È necessario usarla perché la vera portata...
 - ...è nota solo per gli istanti di tempo con misurazioni date
 - $PWL(t)$ può essere calcolata in Matlab con `interp1`
- L è un limite, al di sopra del quale si incanala l'acqua altrove

Esercizio: Bacino Idrico (2)

Si assuma parte della portata in ingresso si possa dirottare

Con $L = 13$, la portata limitata appare così:



- Si ricordi che **plot** disegna una approssimazione lineare a tratti

Esercizio: Bacino Idrico (2)

Q2: Si definisca la funzione:

```
function Wtot = flow_with_limit(T, Q, limit)
```

- Che dati i vettori **T** e **Q** con i tempi e le portate misurate...
- ...E dato il valore **limit** del limite **L**...
- ...Calcoli la quantità totale d'acqua arrivata nel periodo considerato

In pratica, la funzione deve calcolare:

$$\int_{\min(T)}^{\max(T)} \min(L, PWL(t)) dt$$

Si calcoli la quantità d'acqua arrivata, assumendo $L = 13$

Q3: Si determini il valore di **L** perché arrivino $8,000 m^3$ d'acqua