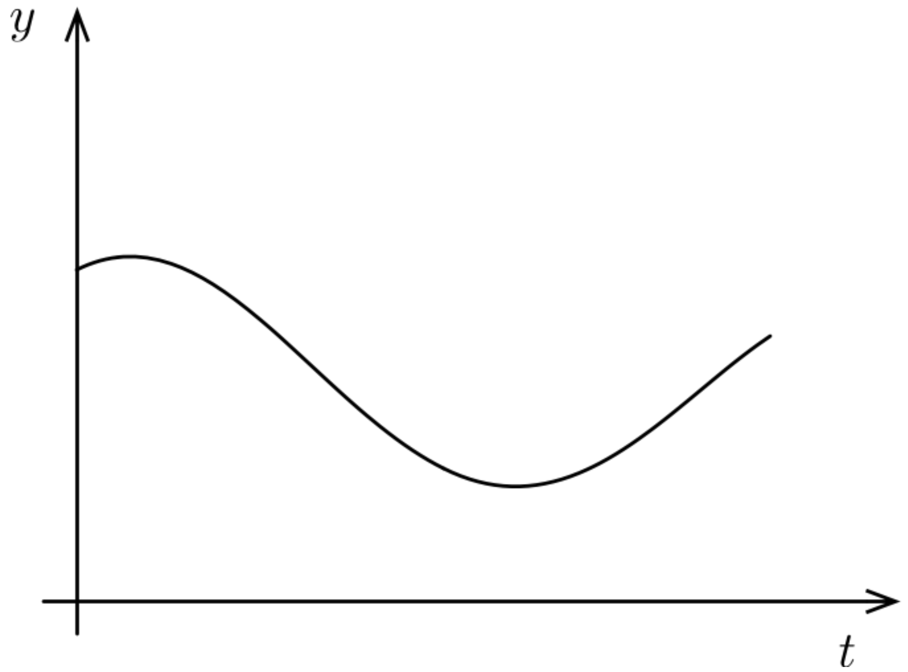
Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Progettazione di curve
(sistemi lineari)

Un Problema Più Complesso

Si desidera progettare un tratto di una pista da moto-cross

Il tratto è rettilineo, ma deve contenere una discesa ed una salita:



Un Problema Più Complesso

Si desidera progettare un tratto di una pista da moto-cross

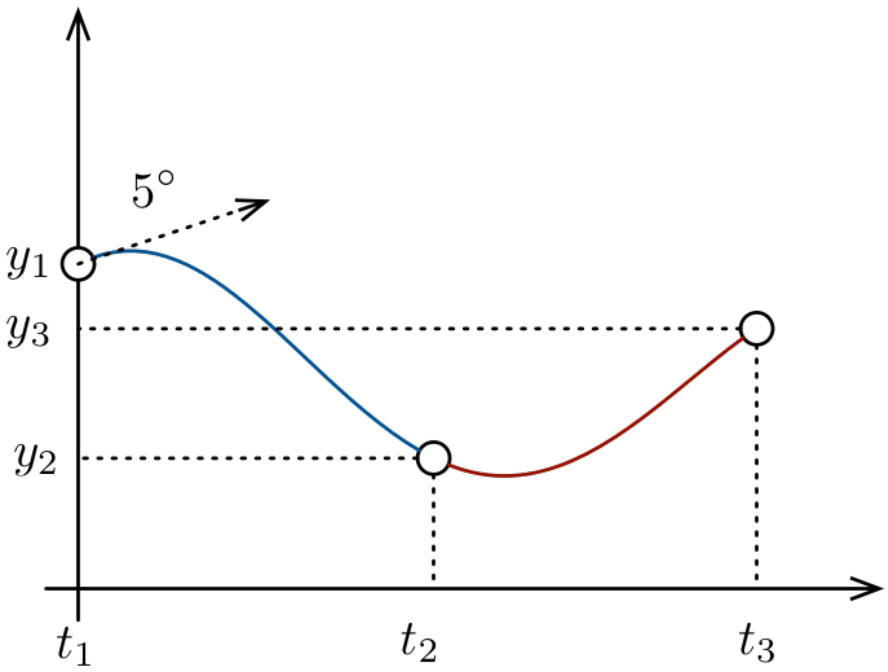
Inoltre, sappiamo che:

- Il tratto deve passare per tre punti chiave
  - Le coordinate hanno i valori noti $(t_1, y_1), (t_2, y_2), (t_3, y_3)$
- Il tratto deve essere descritto da due curve paraboliche
  - La curva f_1, che passa per i punti $(t_1, y_1), (t_2, y_2)$
  - La curva f_2, che passa per i punti $(t_2, y_2), (t_3, y_3)$
- La pendenza deve essere di 5° nel punto (t_1, y_1)
- Le pendenze delle due curve devono essere uguali in (t_2, y_2)

Un Problema Più Complesso

Si desidera progettare un tratto di una pista da moto-cross

Complessivamente, le due curve appariranno così:



Un Problema Più Complesso

Si tratta di un problema più complesso dei precedenti

- Dobbiamo trovare due curve...
- ...Che devono passare per dei punti noti...
- ...Ma anche rispettare delle condizioni sulla pendenza

Si può però risolvere in modo analogo

In particolare, possiamo:

- Definire la/le funzioni da costruire (scegliendo delle funzioni base)
- Formulare le condizioni come equazioni
- Risolvere il sistema risultante

In molti casi, le condizioni portano ad equazioni lineari

Impostazione del Problema

Nel nostro caso, il tratto è descritto da due curve paraboliche

Formalmente, avremo:

$$f_1(t, \alpha) = \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$
$$f_2(t, \beta) = \beta_2 t^2 + \beta_1 t + \beta_0$$

- I parametri sono chiamati α e β per distinguere le due curve

Le due curve devono passare ciascuna per due punti:

$$\alpha_2 t_1^2 + \alpha_1 t_1 + \alpha_0 = y_1 \qquad \alpha_2 t_2^2 + \alpha_1 t_2 + \alpha_0 = y_2$$
$$\beta_2 t_2^2 + \beta_1 t_2 + \beta_0 = y_2 \qquad \beta_2 t_3^2 + \beta_1 t_3 + \beta_0 = y_3$$

- f_1 deve passare per $(t_1, y_1), (t_1, y_1)$, f_2 per $(t_2, y_2), (t_3, y_3)$

Impostazione del Problema

La pendenza di f_1 in t_1 deve essere di 5°

- Una condizione sulla pendenza è una condizione sulla derivata
- Una pendenza di 45° gradi corrisponde ad una derivata pari a 1
- Quindi abbiamo che $5 : 45 = m : 1$, vale a dire $m = 5/45$

Quindi la condizione sulla pendenza di f_1 in t_1 si traduce in:

$$2\alpha_2 t_1 + \alpha_1 = \frac{5}{45}$$

Le pendenze di f_1 ed f_2 devono essere uguali in t_2

Ragionando in modo simile otteniamo l'equazione:

$$2\alpha_2 t_2 + \alpha_1 = 2\beta_2 t_2 + \beta_1$$

Impostazione del Problema

Complessivamente, abbiamo le equazioni:

$$\alpha_2 t_1^2 + \alpha_1 t_1 + \alpha_0 = y_1 \qquad \text{Curva } f_1\text{, primo punto}$$
$$\alpha_2 t_2^2 + \alpha_1 t_2 + \alpha_0 = y_2 \qquad \text{Curva } f_1\text{, secondo punto}$$
$$\beta_2 t_2^2 + \beta_1 t_2 + \beta_0 = y_2 \qquad \text{Curva } f_2\text{, primo punto}$$
$$\beta_2 t_3^2 + \beta_1 t_3 + \beta_0 = y_3 \qquad \text{Curva } f_2\text{, secondo punto}$$
$$\alpha_2(2t_1) + \alpha_1 = \frac{5}{45} \qquad \text{Curva } f_1\text{, pendenza in } t_1$$
$$\alpha_2(2t_2) + \alpha_1 - \beta_2(2t_2) - \beta_1 = 0 \qquad \text{Pendenze in } t_2$$

- Le variabili sono $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \beta_2, \beta_1, \beta_0$
- Si tratta di un sistema lineare!

Impostazione del Problema

Possiamo portare il sistema in forma matriciale:

$$
\begin{array}{cccccc}
\boldsymbol{\alpha_2} & \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_0} & \boldsymbol{\beta_2} & \boldsymbol{\beta_1} & \boldsymbol{\beta_0} \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
t_1^2 & t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
t_2^2 & t_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t_2^2 & t_2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & t_3^2 & t_3 & 1 \\
(2t_1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(2t_2) & 1 & 0 & -(2t_2) & -1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ 5/45 \\ 0
\end{pmatrix}
$$

- Ogni colonna è associata ad un parametro
- I valori dei parametri $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ si possono determinare come al solito

Soluzione

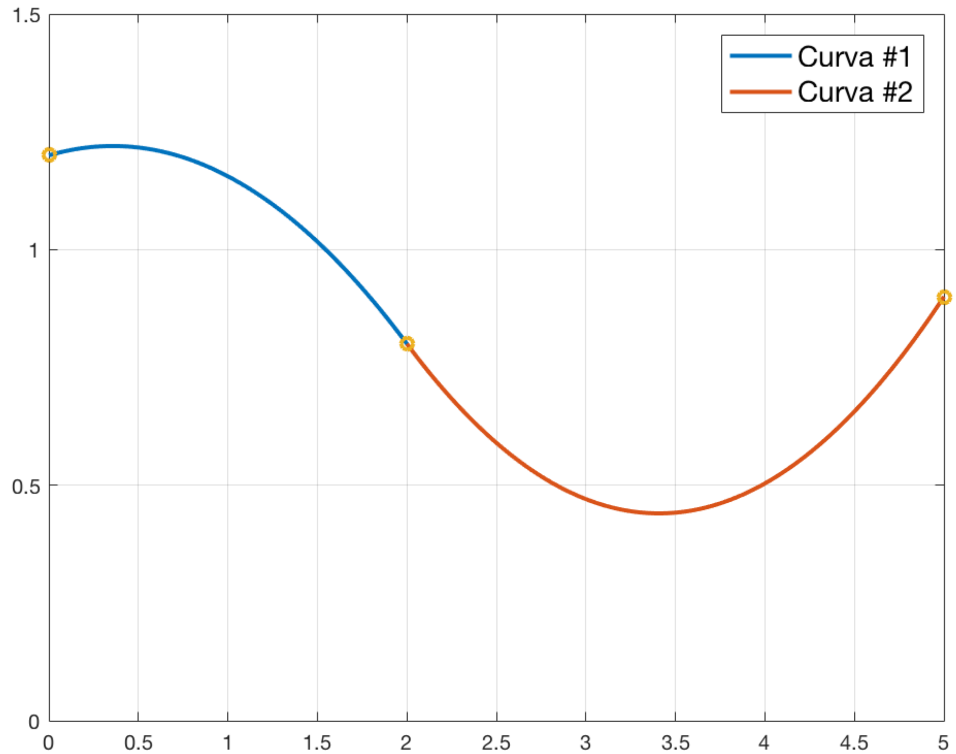
Una possibile soluzione in Matlab:

```
A = [t1^2, t1, 1,      0,   0, 0;
     t2^2, t2, 1,      0,   0, 0;
        0,  0, 0,   t2^2, t2, 1;
        0,  0, 0,   t3^2, t3, 1;
     2*t1,  1, 0,      0,   0, 0;
     2*t2,  1, 0, -2*t2, -1, 0]
b = [y1; y2; y2; y3; m1; 0]; % Termine noto
% Risolvo il sistema
x = A \ b
% Definisco le funzioni per le due curve
f1 = @(t) polyval(x(1:3), t);
f2 = @(t) polyval(x(4:6), t);
```

- Il codice completo è disponibile sul sito del corso

Soluzione

Disegnando le due curve otteniamo:



Un Approccio Alternativo

Guardiamo più nel dettaglio il nostro sistema lineare:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \\ \\ \longrightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_2^2 & t_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_2^2 & t_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t_3^2 & t_3 & 1 \\ (2t_1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2t_2) & 1 & 0 & -(2t_2) & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ 5/45 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Le righe contrassegnate con "$\rightarrow$ " specificano condizioni <u>solo su f_1</u>
- Ce ne sono 3 e f_1 ha esattamente 3 parametri
- Le tre righe sono quindi <u>sufficienti a determinare f_1</u>

Un Approccio Alternativo

Guardiamo più nel dettaglio il nostro sistema lineare:

$$
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
\longrightarrow \\
 \\
 \\
\longrightarrow \\

\end{array}
\begin{pmatrix}
t_1^2 & t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
t_2^2 & t_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t_2^2 & t_2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & t_3^2 & t_3 & 1 \\
(2t_1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(2t_2) & 1 & 0 & -(2t_2) & -1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ 5/45 \\ 0
\end{pmatrix}
$$

- Potremmo definire un sistema più piccolo per determinare f_1 ...
- ...Calcolare la derivata di f_1 in t_1 ...
- ...Usare il valore calcolato per definire un nuovo sistema...
- ...Ed ottenere così i parametri di f_2

Un Approccio Alternativo

Guardiamo più nel dettaglio il nostro sistema lineare:

$$
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\
\longrightarrow \\
 \\
 \\
\longrightarrow \\

\end{array}
\begin{pmatrix}
t_1^2 & t_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
t_2^2 & t_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & t_2^2 & t_2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & t_3^2 & t_3 & 1 \\
(2t_1) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(2t_2) & 1 & 0 & -(2t_2) & -1 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \\ 5/45 \\ 0
\end{pmatrix}
$$

- Questo secondo approccio è leggermente più efficiente...
- ...Ma richiede più passaggi

Entrambi i metodi sono corretti: scegliete liberamente

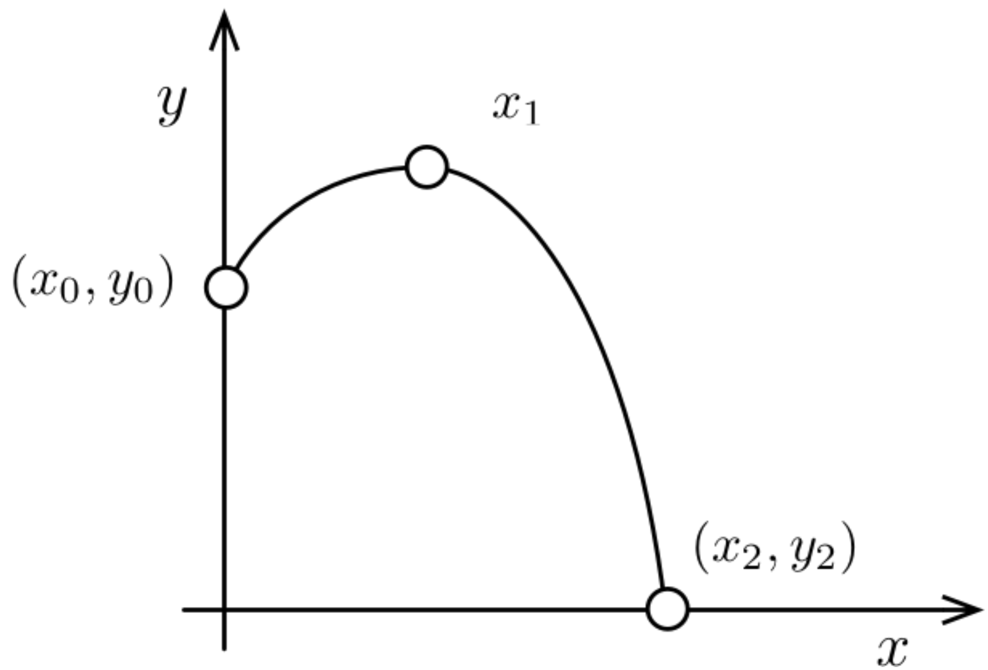
Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Tracciamento di una Arcata

Esercizio: Tracciamento di una Arcata

Si vuole progettare una arcata a ridosso di una parete verticale

La sezione dell'arcata deve presentarsi come segue:



Esercizio: Tracciamento di una Arcata

Si vuole progettare una arcata a ridosso di una parete verticale

- L'arcata deve essere descritta da una curva parabolica
- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_0, y_0) sulla parete
- Deve essere ancorata ad un punto noto (x_2, y_2) a terra
- Deve raggiungere l'altezza massima per $x = x_1$

Si ricordi che per un massimo/minimo la derivata si annulla

A partire dal file `es_arc.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni la forma dell'arcata
- Si stampi a video il valore dell'altezza massima

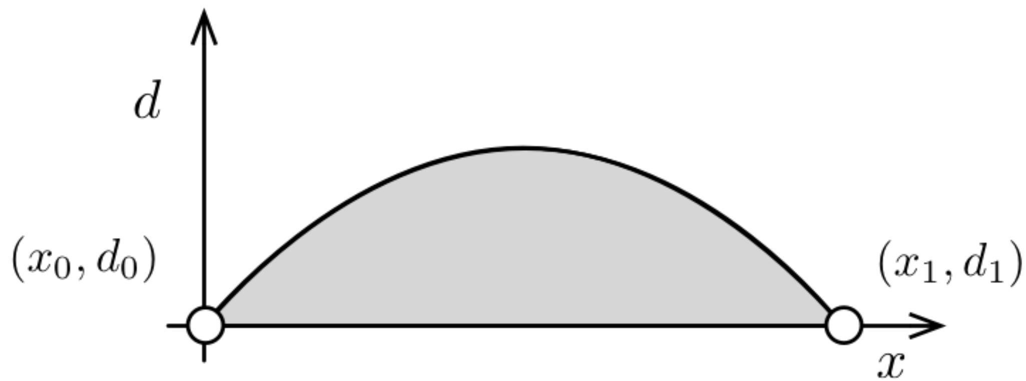
Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Letto di un Fiume

Esercizio: Letto di un Fiume

Si vuole progettare lo scavo per il letto di un fiume

La sezione dello scavo deve presentarsi come segue:



- La coordinata x rappresenta una posizione orizzontale
- La coordinata d rappresenta la profondità dello scavo

Esercizio: Letto di un Fiume

Si vuole progettare lo scavo per il letto di un fiume

- La sezione deve essere descritta da una curva parabolica
- Deve passare per i punti noti (x_0, y_0) e (x_1, y_1)
- L'area della sezione deve essere pari ad un valore prestabilito s_1

Se f è la funzione che descrive la curva, l'area della sezione è:

$$S = \int_{\underbrace{x_0}_{=0}}^{x_1} f(x)\, dx$$

A partire dal file `es_river_bed.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni la forma della sezione

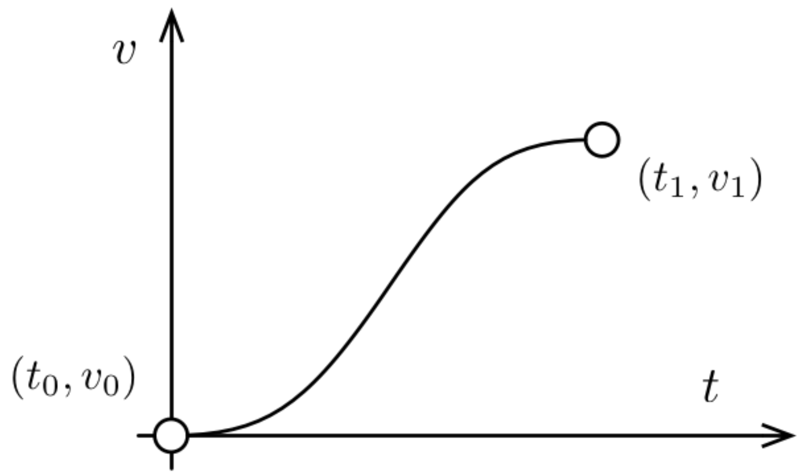
Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Si vuole controllare l'accelerazione di un carrello automatico

Il profilo di velocità in accelerazione deve presentarsi come segue:



- La coordinata t rappresenta il tempo
- La coordinata v rappresenta la velocità

Esercizio: Controllo di Accelerazione

Si vuole controllare l'arresto di un carrello automatico

- Il profilo deve seguire un andamento polinomiale
  - Il grado del polinomio è da determinare
  - Servirà un coefficiente per ogni condizione specificata
- La velocità iniziale e finale ed il tempo di accelerazione t_1 sono noti
- Perché le variazioni non siano troppo brusca...
- ...Si richiede che la derivata della velocità in t_0 e t_1 sia nulla

A partire dal file `es_acceleration_control.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni il profilo della velocità in accelerazione

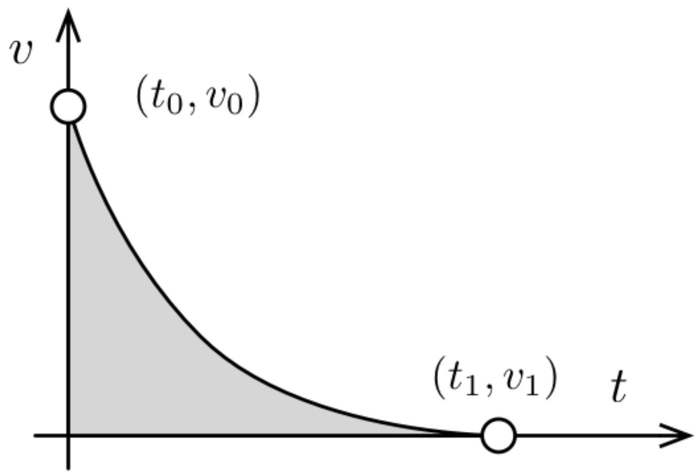
Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Controllo di Frenata

Esercizio: Controllo di Frenata

Si vuole controllare l'arresto di un carrello automatico

Il profilo di velocità in frenata deve presentarsi come segue:



- La coordinata t rappresenta il tempo
- La coordinata v rappresenta la velocità

Esercizio: Controllo di Frenata

Si vuole controllare l'arresto di un carrello automatico

- Il profilo è dato da un polinomio, di grado da determinare
- La velocità iniziale e finale ed il tempo di frenata t_1 sono noti
- Si richiede che la derivata della velocità in t_1 sia nulla
- Lo spazio di frenata S deve essere pari ad un valore s_1, dove:

$$S = \int_{\underbrace{t_0}_{=0}}^{t_1} f(t)\, dt$$

A partire dal file `es_brake_control.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti della curva
- Si disegni il profilo della velocità in frenata

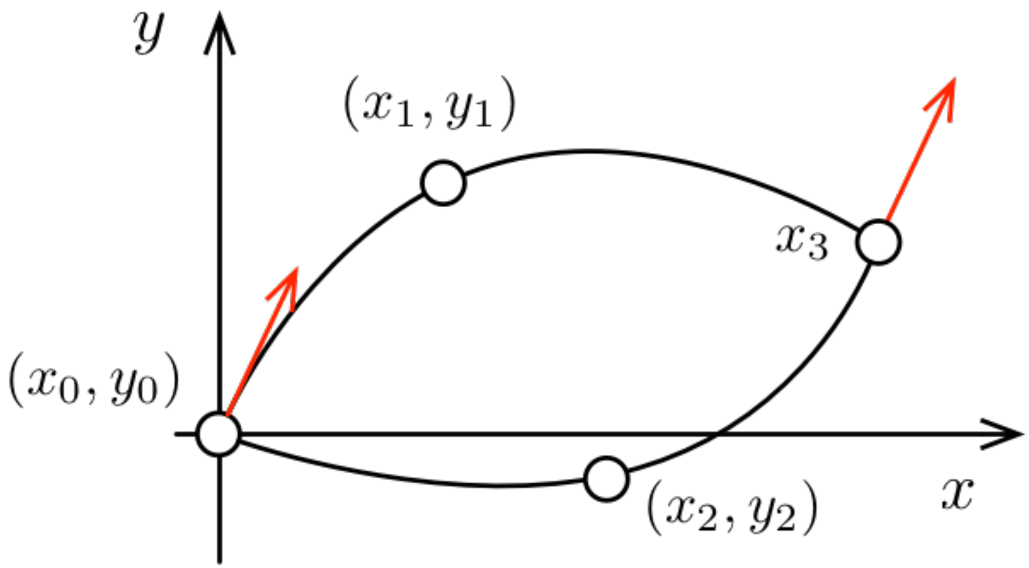
Elementi di Informatica e Applicazioni Numeriche T

Esercizio: Progettazione di un Telaio

Esercizio: Progettazione di un Telaio

Si vuole progettare un telaio per una bicicletta

La forma del telaio deve apparire come segue:



Esercizio: Progettazione di un Telaio

Si vuole progettare un telaio per una bicicletta

- La forma del telaio è descritta da due curve paraboliche f_1 ed f_2
- Le due curve originano in un punto comune $(x_0 y_0)$
- La curva f_1 deve passare per l'ancoraggio della sella in (x_1, y_1)
- La curva f_2 deve passare per l'ancoraggio dei pedali in (x_2, y_2)
- Le due curve devono congiungersi in un punto (x_3, y_3) ...
- ...Di cui è nota solo la coordinata x_3
- Le derivate di f_1 in x_0 ed f_2 in x_3 devono essere uguali

A partire dal file `es_frame.m` nello start-kit:

- Si determinino i coefficienti delle due curve
- Si disegni il profilo del telaio