

# Prova Pratica - Tema A

---

## Contesto

Si vuole studiare il rientro della capsula della missione Apollo 11, al suo ritorno dopo lo sbarco sulla Luna nel 1969. In particolare, ci interessa studiare come la forza di trascinamento dovuta all'atmosfera terrestre operi per ridurre la velocità di rientro. Tutti i dati del problema sono disponibili nello start-kit.

---

## Quesito 1

Vogliamo tenere conto del fatto che la densità dell'aria varia con l'altitudine, utilizzando il modello dell'atmosfera internazionale standard (International Standard Atmosphere). Il modello ISA utilizza l'altitudine geopotenziale  $h$  invece che l'altitudine "grezza"  $z$ . Per calcolare  $h$  a partire da  $z$  si usa la formula:

$$h = \frac{r_e z}{r_e + z}$$

Dove  $r_e$  è il raggio delle Terra e  $z$  è l'altitudine sul livello del mare. A partire da  $h$  si possono ottenere la temperatura  $T$ , la pressione  $P$  e la densità  $\rho$ . In particolare,  $T$  varia secondo una funzione lineare a tratti (calcolabile con `interp1`), con punti di riferimento noti, i.e.:

$$T = T(h) = pwl_T(h)$$

La pressione può poi essere calcolata a partire dalla temperatura come:

$$P = P(h) = P_0 e^{a(h)}$$
$$a(h) = -\frac{g}{R_{spec}} \int_0^h \frac{1}{T(h)} dh$$

Dove  $P_0$  e  $g$  sono la pressione e l'accelerazione di gravità a livello del mare ed  $R_{spec}$  è la costante dei gas perfetti specifica per l'aria secca:  $h_1$  è di fatto  $h$ , rinominata per definire correttamente l'integrale. Infine, la densità può essere calcolata come:

$$\rho = \rho(h) = \frac{P(h)}{R_{spec} T(h)}$$

Si definisca una funzione:

```
function [rho, P, T] = isa(z, g, rE, ISA_h, ISA_T, R, P0)
```

Che, date tutte le informazioni necessarie, calcoli i valori di  $T$ ,  $P$  e  $\rho$  per una altitudine  $z$  (scalare) data. I vettori `ISA_h` e `ISA_T` devono contenere i valori di riferimento per la funzione lineare a tratti che definisce  $T$  (sono disponibili nello start kit).

Si utilizzi la funzione per determinare i valori di  $T$ ,  $P$  e  $\rho$  al livello del mare (i.e.  $z = 0$ ).

---

## Quesito 2

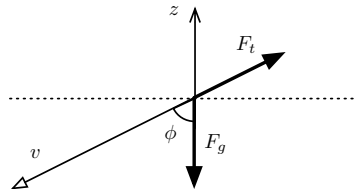
Si utilizzi la funzione definita nel quesito 1 per determinare il valore della pressione tra il livello del mare e l'altitudine  $z_0$  a partire dalla quale studieremo il rientro della capsula. Si disegni l'andamento della pressione su un grafico.

NOTA: poiché la funzione `isa` del Q1 è progettata per lavorare con  $z$  scalare, sarà necessario invocarla ripetutamente per ottenere tutti i valori di pressione necessari.

---

### Quesito 3

Si determini l'andamento dell'altitudine della capsula nel tempo. Per semplicità, assumiamo che la capsula mantenga un angolo fisso  $\phi$  rispetto alla verticale: in questo modo, lo stato della capsula può essere caratterizzato tramite la sua altitudine  $z$  e la sua velocità tangenziale  $v$ , entrambi scalari. La capsula è soggetta alla forza di trascinamento ed alla forza di gravità, orientate come segue:



Tenendo conto delle direzioni delle forze, l'andamento dello stato della capsula è determinato dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{z} = v \cos \phi$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}(F_g + F_t)$$

Dove  $F_g$  ed  $F_t$  sono le forze di gravità e di trascinamento nella direzione della velocità:

$$F_g = -mg \cos \phi$$

$$F_t = -\frac{1}{2}\rho(h)C_d S v |v|$$

Dove  $\rho(h)$  è la densità dell'aria, che dipende da  $h$  e perciò da  $z$ : può essere calcolata utilizzando la funzione `isa` definita al Q1.  $C_d$  è il coefficiente di trascinamento ed  $S$  è la superficie della sezione della capsula, data da:

$$S = \pi \left( \frac{D}{2} \right)^2$$

Si risolva una ODE per determinare l'andamento dell'altitudine e della velocità (tangenziale) della capsula per 20 secondi, a partire da uno stato iniziale  $x_0 = (z_0, -v_0)$  noto. Si disegnino i due andamenti su due figure separate.

### Quesito 4

Si definisca una funzione

```
function X = my_RK4(f, Ti, x0)
```

Che implementi il metodo di Runge Kutta classico per la soluzione di ODE, dati:

- Una funzione  $f(t, x)$  che calcoli la derivata dello stato come vettore colonna (i.e. lo stesso tipo di funzione richiesto da `ode45`)
- Un vettore  $Ti$  con gli istanti di tempo che devono essere visitati dall'algoritmo
- Lo stato iniziale  $x_0$

Il metodo di Runge-Kutta classico è definito dal tableau:

0				
1/2	1/2			
1/2		1/2		
1			1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Si utilizzi la funzione per determinare di nuovo l'andamento dello stato del meteorite. Come vettore  $T_i$  si utilizzi quello con gli istanti di tempo visitati al Q3. Si disegni l'andamento della velocità calcolata in questo modo e lo si confronti con quello del Q3, disegnando le due curve sulla stessa figura.

---

Le slides e le soluzioni degli esercizi del corso sono consultabili su:

<http://www.lia.disi.unibo.it/Staff/MicheleLombardi/LabInfo1617/>