

Prova Pratica - Tema A

Contesto

Si vuole studiare l'andamento della popolazione di volpi e conigli in un tratto di campagna britannica. Si ipotizza che l'andamento delle due popolazioni sia modellabile mediante le equazioni di Lotka-Volterra, un classico modello preda-predatore tempo-continuo. Il modello è definito dalle due equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r - \beta r f \\ \dot{f} &= \delta r f - \gamma f\end{aligned}$$

Dove r è il numero di conigli, f è il numero di volpi e:

- α è il tasso naturale di crescita della popolazione di conigli
- β è il tasso di predazione dei conigli da parte delle volpi
- δ è il “bonus” riproduttivo per le volpi in base alla predazione
- γ è il tasso di decadimento naturale della popolazione di volpi

Tutti i dati del problema sono disponibili nello start-kit. Tutti i parametri del modello siano calcolati avendo come unità di misurate temporale un mese.

Quesito 1

Si determini, risolvendo l'ODE del modello, l'andamento delle due popolazioni per 10 anni, a partire da numeri iniziali di conigli nr_0 e di volpi nf_0 noti.

Si disegnino i due andamenti nel tempo sulla stessa figura. Si disegni poi su una seconda figura la traiettoria nello spazio degli stati (o spazio delle fasi).

Quesito 2

In corrispondenza di un punto di equilibrio, tutte le derivate di un sistema dinamico tempo continuo devono annullarsi. Quindi, per i punti di equilibrio del modello di Lotka-Volterra deve valere l'equazione:

$$(\dot{r}, \dot{f}) = (0, 0)$$

Il modello ha sempre un punto di equilibrio quando entrambe le popolazioni sono nulle, più un secondo punto di equilibrio non banale.

Risolvendo l'equazione indicata mediante metodi numerici, si determini il valore delle due popolazioni per il secondo punto di equilibrio per il caso considerato.

Quesito 3

Si determini quale valore dovrebbero avere i due parametri β e δ perché, nel secondo punto di equilibrio, i numeri di conigli e volpi siano pari a due valori nr_1 ed nf_1 prestabiliti.

Quesito 4

Si definisca una funzione

```
function X = my_RK38(f, Ti, x0)
```

Che implementi il metodo di Runge Kutta ai 3/8 per la soluzione di ODE, dati:

- Una funzione $f(t, x)$ che calcoli la derivata dello stato come vettore colonna (i.e. lo stesso tipo di funzione richiesto da ode45)
- Un vettore T_i con gli istanti di tempo che devono essere visitati dall'algoritmo
- Lo stato iniziale x_0

Il metodo di Runge-Kutta ai 3/8 è definito dal tableau:

0				
1/3	1/3			
2/3	-1/3	1		
1	1	-1	1	
	1/8	3/8	3/8	1/8

Si utilizzi la funzione per determinare di nuovo l'andamento delle due popolazioni. Come vettore T_i si utilizzi quello con gli istanti di tempo visitati al Q1. Si disegni l'andamento della popolazione dei conigli calcolata in questo modo e lo si confronti con quello del Q1, disegnando le due curve sulla stessa figura.
